Упражнение 8. Непрекъснати сл. величини.

Функция на разпределение, плътност, функция от сл. величина, числови характеристики.

Ако X е сл. величина с ф.р. $F_X(x) = P(X < x)$, плътността и е $f_x(x) = F'_X(x)$. Когато тази производна съществува за всяко x, сл. величина се нарича абсолютно непрекъсната.

Ако $g(x)$ е реална измерима функция, то $Y = g(X)$ е друга сл. величина.

I) Ако $g(x)$ е строго растяща, тогава съществува обратната функция $g^{-1}(.)$ и за функцията на разпределение на Y имаме

$$F_Y(x) = P(Y < x) = P(g(X) < x) = P(X < g^{-1}(x)) = F(g^{-1}(x)).$$

Ако g и g^{-1} са диференцируеми, то плътността на Y се изразява чрез плътността на X като

$$f_Y(x) = f_X(g^{-1}(x))[(g^{-1}(x))'] = \frac{f_X(g^{-1}(x))}{g'(x)}. \tag{1}$$

II) Ако $g(x)$ е строго намаляваща, тогава отново съществува обратната функция $g^{-1}(.)$ и за функцията на разпределение на Y имаме

$$F_Y(x) = P(Y < x) = P(g(X) < x) = P(X > g^{-1}(x)) = 1 - F(g^{-1}(x)).$$

Ако g и g^{-1} са диференцируеми, то плътността на Y се изразява чрез плътността на X като

$$f_Y(x) = -f_X(g^{-1}(x))[(g^{-1}(x))'] = \frac{-f_X(g^{-1}(x))}{g'(x)}. \tag{2}$$

*В общият случай, когато g е монотонна, и съществува g^{-1} и освен това те са диференцируеми, то уравнения (**??**) и (**??**) могат да се обобщят като*

$$f_Y(x) = f_X(g^{-1}(x))|(g^{-1}(x))'| = \frac{f_X(g^{-1}(x))}{|g'(x)|}. \tag{3}$$

Равномерно разпределение.

Сл. величина X е равномерно разпределена в интервала $[a,b]$, ($X \sim U(a,b)$), когато функцията на разпределение е

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Плътността на равномерното разпределение е

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Нека да пресметнем математическото очакване и дисперсията на равномерно разпределена сл. величина.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left. \frac{x^2}{2(b-a)} \right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \left. \frac{x^3}{3(b-a)} \right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Следователно

$$D[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Зад. 1. *Върху окръжност $K(O,r)$ е фиксирана точка A, точка B попада по случаен начин върху окръжността. Да се намери математическото очакване на лицето на триъгълник AOB.*

Решение:

Положението на точка B спрямо точка A се определя от ъгълът $\phi = \sphericalangle AOB$. ϕ е сл. величина с равномерно разпределение в интервала $[0, 2\pi]$. Освен това лицето на триъгълника AOB е равно на

$$S = \frac{AO \times OB}{2} \sin(\min\{\phi, 2\pi - \phi\}) = \frac{r^2}{2} \sin(\min\{\phi, 2\pi - \phi\}).$$

Тогава

$$\begin{aligned} E[S] &= \int_{\mathbf{R}} \frac{r^2}{2} \sin(\min\{x, 2\pi - x\}) f_\phi(x) dx \\ &= \int_{[0,2\pi]} \frac{r^2}{2} \sin(\min\{x, 2\pi - x\}) \frac{1}{2\pi} dx \\ &= \frac{r^2}{4\pi} \int_{[0,2\pi]} \sin(\min\{x, 2\pi - x\}) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{r^2}{4\pi} \left[\int_{[0,\pi]} \sin(\min\{x, 2\pi - x\}) dx + \int_{[\pi,2\pi]} \sin(\min\{x, 2\pi - x\}) dx \right]$$

$$= \frac{r^2}{4\pi}\left[\int_{[0,\pi]} \sin x dx + \int_{[\pi,2\pi]} \sin(2\pi - x) dx\right]$$

$$= \frac{r^2}{4\pi}\left[\int_{[0,\pi]} \sin x dx - \int_{[\pi,2\pi]} \sin x dx\right]$$

$$= \frac{r^2}{4\pi}\left[\int_{[0,\pi]} \sin x dx + \int_{[0,\pi]} \sin x dx\right]$$

$$= \frac{r^2}{2\pi}\int_{[0,\pi]} \sin x dx = \frac{r^2}{2\pi}(-\cos x|_0^\pi) = \frac{r^2}{\pi}.$$

Зад. 2. *Във вътрешността на кръг с радиус R случайно се избират точките A и B. Да се намери вероятността окръжността с център A и радиус AB да лежи във вътрешността на кръга.*

Решение:
Нека да означим с ξ разстоянието от точката A до центъра на окръжността.

Сл. величина ξ е равномерно разпределена в интервала $[0, R]$. Плътността и е $f_\xi(r) = \frac{1}{R}$ за $r \in [0, R]$. Така $P(\xi = r) = \frac{dr}{R}, 0 \leq r \leq R$. Събитието $C = \{$Окръжност с център А и радиус АВ е вътре в дадената окръжност$\}$ се сбъдва, ако разстоянието от A до B е не по-голямо от $R - \xi$, т.е. ако точката B попадне в кръг с център A и радиус $R - \xi$. Вероятността за това е равна на лицето на този кръг към лицето на целия кръг с радиус R. Така

$$P(C|\xi = r) = \frac{(R-r)^2\pi}{R^2\pi} = \frac{(R-r)^2}{R^2}, \quad 0 \leq r \leq R.$$

Сега по формулата за пълната вероятност ще имаме

$$P(C) = \int_{\mathbf{R}} P(C|\xi = r)P(\xi = r) = \int_{[0,R]} P(C|\xi = r)\frac{dr}{R}$$

$$= \int_{[0,R]} \frac{(R-r)^2}{R^2}\frac{dr}{R} = -\left.\frac{(R-r)^3}{3R^3}\right|_0^R = \frac{1}{3}.$$

Експоненциално разпределение.
Случайната величина X има показателно (експоненциално) разпределение с параметър $\lambda > 0$, $X \sim Exp(\lambda)$ когато функцията на разпределение е

$$F_X(x) = P(X < x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x/\lambda), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Съответната плътност е

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\exp(-x/\lambda), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Да пресметнем математическото очакване и дисперсията

$$E[X] = \int_0^\infty x\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}dx = -\int_0^\infty x de^{-x/\lambda} = -\left[xe^{-x/\lambda}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x/\lambda}dx\right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-x/\lambda}dx = -\lambda\int_0^\infty e^{-x/\lambda}d(-x/\lambda) = -\lambda(e^{-x/\lambda}|_0^\infty) = \lambda.$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} dx = -\int_0^\infty x^2 de^{-x/\lambda} = -\left[x^2 e^{-x/\lambda}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x/\lambda} dx^2 \right]$$

$$= \int_0^\infty 2x e^{-x/\lambda} dx = 2\lambda \int_0^\infty x \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} dx = 2\lambda^2.$$

Тогава

$$D[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 2\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2.$$

Зад. 3. *В магазин работят две каси. Предполагаме, че времето необходимо за обслужване на клиент на всяка от двете опашки е експоненциално разпределена случайна величина с математическо очакване 8 мин. за първата опашка и 5 мин. за втората. Клиент, избрал по случаен начин опашка, е чакал по-малко от 4 мин. Каква е вероятността той да е бил на първата опашка.*

Решение:
Имаме две хипотези

$H_1 = \{$Човекът е избрал първа каса$\}$, $P(H_1) = 0.5$,

$H_2 = \{$Човекът е избрал втора каса$\}$, $P(H_2) = 0.5$.

Нека да означим времето за обслужване на човека с X. За сл. величина X имаме

$P(X < x|H_1) = 1 - e^{-x/8}, x \geq 0$ и $P(X < x|H_2) = 1 - e^{-x/5}, x \geq 0$.

По формулата за пълната вероятност имаме

$$P(X < 4) = P(X < 4|H_1)P(H_1) + P(X < 4|H_2)P(H_2) = 0.5(1 - e^{-4/8} + 1 - e^{-4/5})$$

$$= 0.5(2 - 0.60 - 0.55) = 0.5 \times 0.85 = 0.425.$$

Сега по формулата на Бейс имаме

$$P(H_1|X < 0.4) = \frac{P(X < 4|H_1) \times P(H_1)}{P(X < 4)} = \frac{0.5 \times (1 - e^{-4/8})}{0.425} = (0.5 \times 0.4)/0.425 = 0.47.$$

Зад. 4. *Нека случайната величина* $\xi \sim Exp(\lambda)$. *Да се намерят плътностите на следните случайни величини:*
а) $\eta = -\xi$;
б) $\eta = 2\xi - 1$;
в) $\eta = \xi^{1/2}$;
г) $\eta = \xi^a, a > 0$.
Решение:
а) $g(x) = -x$. Съгласно формула (**??**) плътността на $\eta = -\xi$ е

$$f_\eta(x) = \frac{f_\xi(-x)}{|-1|} = f_\xi(-x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}e^{-(-x)/\lambda}, & -x \geq 0, \\ 0, & -x < 0. \end{cases}$$

Така намираме

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}e^{x/\lambda}, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

б) $g(x) = 2x - 1$. Тогава $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ и $|g'(x)| = 2$. Така

$$f_\eta(x) = \frac{f_\xi(\frac{x+1}{2})}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda}\exp(-\frac{x+1}{2\lambda}), & \frac{x+1}{2} \geq 0, \\ 0, & \frac{x+1}{2} < 0 \end{cases}$$

Следователно

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda}\exp(-\frac{x+1}{2\lambda}), & x \geq -1, \\ 0, & x < -1 \end{cases}$$

в) $g(x) = \sqrt{x}$. Тогава $g^{-1}(x) = x^2$ и $|g'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0.$. Така

$$f_\eta(x) = \frac{f_\xi(x^2)}{1/2\sqrt{x}} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{\lambda}\exp(-x^2/\lambda), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Следователно

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{\lambda}\exp(-x^2/\lambda), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

г) $g(x) = x^a,\ a > 0, x \geq 0$. Тогава $g^{-1}(x) = x^{1/a}$ и $|g'(x)| = ax^{a-1}, x \geq 0.$. Така

$$f_\eta(x) = \frac{f_\xi(x^{1/a})}{ax^{a-1}} = \begin{cases} \frac{1}{a\lambda x^{a-1}}\exp(-x^{1/a}/\lambda), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Следователно

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{a\lambda x^{a-1}}\exp(-x^{1/a}/\lambda), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Зад. 5. *Случайната точка B е равномерно разпределена върху окръжността с център в точката $A(0,a)$ и радиус a. Нека $C(\xi,0)$ е пресечната точка на правата AB с абцисната ос. Да се намери плътността на ξ.*

Решение:
Положението на точката се определя от ъгъла $\alpha = \sphericalangle OAB$, който е сл. величина равномерно разпределена в интервала $[0,2\pi]$. За да решим задачата ще разгледаме два случая:

1. Нека $x > 0$ е фиксирано. И нека $D(x,0)$. За да се сбъдне събитието $\{\xi < x\}$, трябва да се сбъдне събитието

$$D^+ = \{\alpha \in (0, \operatorname{arctg}(\frac{x}{a}))\} \bigcup \{\alpha \in (\pi/2, \pi)\}$$

$$\bigcup \{\alpha \in (\pi, \pi + \operatorname{arctg}(\frac{x}{a}))\} \bigcup \{3\pi/2, 2\pi)\}$$

Като вземем в предвид, че α е равномерно разпределена в интервала $[0,2\pi]$, намираме

$$P(\xi < x) = P(D^+) = \frac{2\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg}(\frac{x}{a})}{2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\frac{x}{a}).$$

2. Нека $x < 0$ е фиксирано. За да се сбъдне събитието $\xi < x$ тряба да се сбъдне събитието

$$D^- = \{\alpha \in (3\pi/2, 2\pi - \operatorname{arctg}(\frac{-x}{a}))\} \bigcup \{\alpha \in (\pi/2, \pi - \operatorname{arctg}(\frac{-x}{a}))\}$$

Така за отрицателни стойности на x намираме

$$P(\xi < x) = P(D^-) = \frac{2(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}(\frac{-x}{a})}{2\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\frac{-x}{a})$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\frac{x}{a})$$

Последното е поради нечетността на функцията arctg.

Така намерихме функцията на разпределение за всяко $x \in (-\infty, \infty)$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\frac{x}{a}).$$

Тогава плътността е

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Това разпределение е известно като разпределение на Коши. То няма математическо очакване и дисперсията му е безкрайно голяма.

Нормално разпределение

Случайната величина X има нормално разпределение с параметри a и σ^2, (означаваме също $X \sim N(a, \sigma^2)$), когато плътността и е

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Функцията на разпределение се записва по следния начин

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du, \quad -\infty < x < \infty.$$

Математическото очакване и дисперсията на сл. в. X са съответно: $E[X] = a$, $D[X] = \sigma^2$. Да пресметнем математическото очакване. Имаме

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx + a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} d(x-a) + a$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a)}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} d\frac{(x-a)}{\sqrt{2}\sigma} + a$$

[Полагаме $y = \frac{(x-a)}{\sqrt{2}\sigma}$ и получаваме]

$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2} dy + a$$

$$= -\frac{\sqrt{2}\sigma}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} d(-y^2) + a$$

$$= -\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-y^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} \right) + a$$

$$= 0 + a = a.$$

Нормално разпределена сл. величина Z със средно $a = 0$ и дисперсия $\sigma^2 = 1$ се отбелязва $Z \sim N(0,1)$ и се нарича стандартна нормална сл. величина. Нейната плътност се означава с

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

и съответно функцията на разпределение

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad -\infty < x < \infty.$$

Тази функция на разпределение е табулирана и таблици има в почти всяка книга по вероятности и статистика, поради честото използуване на нормално разпределени сл. величини в различни приложения и поради следният факт:

Ако $X \sim N(a, \sigma^2)$, *то* $Z = \frac{X-a}{\sigma} \sim N(0,1)$. *С други думи ако центрираме с* a *и нормираме със* σ *новополучената сл. величина е стандартна нормална сл. величина. Нека да се убедим, че е така. Нека* $X \sim N(a, \sigma^2)$. *Преобразуването е* $g(x) = (x-a)/\sigma$ *и следователно* $g^{-1}(x) = \sigma x + a$ *и* $|g'(x)| = 1/\sigma$. *Тогава*

$$f_Z(x) = f_X(\sigma x + a) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(\sigma x + a - a)^2}{2\sigma^2}} \right) / (1/\sigma)$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x).$$

Как да използуваме това преобразувание и таблиците на стандартната нормална функция на разпределение.

Нека да видим най-напред, че плътността $\varphi(x)$ *е четна функция, следователно графиката и е симетрична спрямо оста* Oy. *За дадено* $x \in (-\infty, \infty)$ *стойността на функцията на разпределение* $\Phi(x)$ *е равна на лицето под графиката на* $\varphi(x)$ *над интервала* $(-\infty, x)$. *Разбира се цялото лице е равно на единица.*

Като разгледаме и картинката можем да установим лесно следните връзки, които са полезни в случай, че таблицата, с която разполагаме съдържа само стойностите на $\Phi(x)$ *за* $x \in [0, \infty)$. *(както е например в учебника на Б.Димитров и Н.Янев).*

За $x < 0$ *е в сила* $P(Z < x) = P(Z > -x) = 1 - \Phi(-x)$.

За всяко x *в в сила* $P(Z \geq x) = 1 - P(Z < x) = 1 - \Phi(x)$.

Ако $X \sim N(a, \sigma^2)$ *то вероятността* $P(x_1 \leq X < x_2)$ *ще пресмятаме по следния начин:*

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(\frac{x_1 - a}{\sigma} \leq \frac{X - a}{\sigma} < \frac{x_2 - a}{\sigma})$$

$$= P(\frac{x_1 - a}{\sigma} \leq Z < \frac{x_2 - a}{\sigma}) = \Phi(\frac{x_2 - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1 - a}{\sigma}).$$

Зад. 6. *Предполагаме, че височината на двадесет годишните младежи е нормално разпределена сл.в.* $a = 170$, $= 5$. *Да се определи вероятността от пет случайно избрани младежи поне един (точно двама) да има ръст от 165 до 175 см. Каква е вероятността младеж да бъде по-висок от 170 ако се знае, че той е по-висок от 160.*

Решение:

Нека да означим с X сл. в. равна на височината на младеж на 20 години. Според условието $X \sim N(170, 5^2)$. Нека да пресметнем вероятността

$$p = P(165 \leq X < 175) = P(165 - 170 \leq X - 170 < 175 - 170)$$

$$= P(\frac{165 - 170}{5} \leq \frac{X - 170}{5} < \frac{175 - 170}{5})$$

$$= P(-1 \leq \frac{X-170}{5} < 1) = P(-1 \leq Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 =$$

$$2 \times 0.8413 - 1 = 1.6826 - 1 = 0.6826.$$

Сега опитът ”Избрани са независимо един от друг 5 младежи на 20 години” е Бренулиева серия от независими опити и ако считаме за успех младежът да има ръст между 165 и 175 см, то вероятността успех е $p = 0.6826$.

Сега вероятността за поне един успех е

$$P_{\geq 1} = 1 - b(5, 0, 0.6826) = 1 - (0.6826)^5 = 1 - 0.148 = 0.852$$

Вероятността за точно два успеха е

$$b(5, 2, 0.6826) = \binom{5}{2} 0.6826^2 (1 - 0.6826)^3 = 10 \times (0.6826)^2 \times (0.3174)^3 = 0.469$$

Да намерим вероятността

$$P(X \geq 170 | X \geq 160) = P(X \geq 170, X \geq 160)/P(X \geq 160) = \frac{P(X \geq 170)}{P(X \geq 160)}.$$

Намираме

$$P(X \geq 170) = P((X - 170)/5 \geq (170 - 170)/5) = P(Z \geq 0) = 1 - \Phi(0) = 0.5$$

$$P(X \geq 160) = P((X - 170)/5 \geq (160 - 170)/5) = P(Z \geq -2)$$

$$= 1 - \Phi(-2) = 1 - (1 - \Phi(2)) = \Phi(2) = 0.9772$$

Така

$$P(X \geq 170 | X \geq 160) = P(X \geq 170, X \geq 160)/P(X \geq 160)$$

$$= P(X \geq 170)/P(X \geq 160) = 0.5/0.9772 = 0.512.$$

Допълнителни задачи

Зад. Д1. *Да предположим, че нишка, произвеждана от някакъв тъкачен стан се къса в случаен момент* $\xi \geq 0$, *при което*

$$P(t \leq \xi \leq t + \Delta t) = \Delta t/\lambda + 0(\Delta t), t \geq 0,$$

а събитията $\{\xi < t\}$ *и* $\{t \leq \xi < t + \Delta t\}$ *са независими за всяко* $t > 0$. *Да се намери плътността на* ξ.

Зад. Д2. *Нека* $\xi \sim N(a, \sigma^2)$. *Да се намерят ф.р. и плътносттна на сл.в.* $\eta = e^{\xi}$.

Зад. Д3. *Нека сл.в.* ξ *има непрекъсната ф.р.* $F(x) = P(\xi < x)$. *Да се намери разпределението на сл.в.* $\eta = F(\xi)$.