Упражнение 6. Дискретни сл. величини Случайни величини

Нека да разгледаме функция X с дефиниционно множество, множеството от елеменарните изходи от някакъв експеримент Ω, и приемаща реални стойности.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Такава функция, чиито стойности зависят от случая, се нарича случайна величина.

Ако една случайна величина приема крайно или изброимо много стойности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, тя се нарича дискретна сл. величина.

Събитията $A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots$ образуват пълна група Техните вероятности се означват най-често така:

$$P\{X = x_i\} = P(A_i),\ i = 1, 2, \ldots.$$

Съвкупността от стойностите на случайната величина и съответните им вероятости се нарича *разпределение на сл величина* X.

Зад.1. *От урна съдържаща 5 бели и 3 черни топки се избират последователно една по една топки докато се появи бяла. Да се намери разпределението на случайната величина- "брой на изтеглените черни топки"и се пресметне математическото очакване и дисперсията и. Ако извадката е:*

а) без връщане;

б) с връщане.

Решение:

Нека да означим с X "броя на изтеглените черни топки преди бялата".

а) Нека извадката е без връщане. Тогава възможните стойности на X са $0, 1, 2, 3$. Да пресметнем техните вероятности:

$P(X = 0) = P($първата изтеглена топка е бяла$) = \frac{5}{8} = \frac{210}{336}$

$P(X = 1) = P($ I-та черна, II-бяла$)$

$= P(II$-бяла$|I$-черна$) \times P(I-$черна$) = \dfrac{5}{7} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{15}{56} = \dfrac{90}{336}$

$P(X = 2) = P(I$-та черна, II-черна, III-бяла$)$

$= P(III-$бяла$|I$-черна, II-черна$) \times P(II-$черна$|I-$черна$) \times P(I$-черна$)$

$= \dfrac{5}{6} \times \dfrac{2}{7} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{30}{336}$

$P(X = 3) = P(I$-та черна, II-черна, $III-$черна, IV-бяла$)$

$= P(IV-$бяла$|I$-черна, II-черна, $III-$черна$)$

$\times P(III-$черна$|I-$черна, $II-$черна$) P(II$-черна$|I-$черна$) P(I-$черна$)$

$= \dfrac{5}{5} \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{7} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{6}{336}$

Така законът за разпределение на сл. величина X е

x	0	1	2	3
p	$\frac{210}{336}$	$\frac{90}{336}$	$\frac{30}{336}$	$\frac{6}{336}$

б) Нека извадката е с връщане. Тогава имаме серия от бернулиеви опити, при което можем да считаме за успех - "изваждане на бяла топка" с вероятност $p = 5/8$ и неуспех - "изваждане на черна топка" с вероятност $q = 3/8$. Тогава броят X на неуспехите преди първия успех има геометрично разпределение $P(X = x) = q^x p, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$ В случая

$$P(X = x) = \left(\frac{3}{8}\right)^x \frac{5}{8}.$$

Зад. 2. *В кутия има 7 лампи от които 3 са дефектни. По случаен начин се избират за проверка 4 лампи. Да се намери разпределението на случайната величина "брой на изпробваните качествени лампи" и да се пресметне нейното очакване.*

Решение:
Нека X е броят на добрите лампи измежду избраните 4. Стойностите на X са $1, 2, 3, 4$. Да пресметнем техните вероятности:

$$P(X = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{3}}{\binom{7}{4}} = \frac{4}{35}.$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{2}}{\binom{7}{4}} = \frac{18}{35}.$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{1}}{\binom{7}{4}} = \frac{12}{35}.$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{3}{0}}{\binom{7}{4}} = \frac{1}{35}.$$

Така законът на разпределение на X е:

x	1	2	3	4
p	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

Сега използвайки $EX = \sum x_i.p_i$ получаваме

$$EX = 1 \times \frac{4}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{12}{35} + 4 \times \frac{1}{35} = \frac{80}{35} = \frac{16}{7}.$$

Зад. 3. *Книга от 500 страници съдържа 50 печатни грешки. Всяка грешка може да се срещне на коя да е страница с една и съща вероятност. Да се определи вероятността избрана страница да съдържа не по-малко от три грешки.*

Решение:
Една печатна грешка може да бъде на дадена страница с вероятност $p = 1/500$. Броят на печатните грешки на една дадена страница е биномна сл. величина с разпределение $P(X = x) = b(50, x, 1/500), x = 0, 1, 2, \ldots, 50$. Тогава

$$P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$$

$$= 1 - \binom{50}{0}\left(\frac{1}{500}\right)^0\left(\frac{499}{500}\right)^{50}$$

$$-\binom{50}{1}\left(\frac{1}{500}\right)^1\left(\frac{499}{500}\right)^{49} - \binom{50}{2}\left(\frac{1}{500}\right)^2\left(\frac{499}{500}\right)^{48} = 0.000146$$

Зад. 4. *От числата от 1 до 10 по случаен начин се избират три числа без връщане. Нека ξ е случайната величина –"средното по-големина число от избраните три". Да се намери разпределението на ξ, $E(\xi)$ и се да пресметнат вероятностите на събитията: $A = \{\xi \geq 7\}$, $B = \{3 \leq \xi < 7\}$, $C = \{|\xi - 2| < 2\}$. Да се намери разпределението на сл.в. $\eta = (\xi - 5)/2$.*

Решение:
Възможните стойности на ξ са $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ Нека да пресметнем техните вероятности.

$P(\xi = 2) = P($едното число да е 1, второто да е 2 и третото да е избрано измежду числата от 3 до 10)

$= \frac{\binom{1}{1}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{8}{120}$

$P(\xi = 3) = P($едното число да е измежду числата от 1 до 2, второто да е 3, третото да е измежду числата от 4 до 10)

$= \frac{\binom{2}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{14}{120}$

$P(\xi = 4) = P($едното число да е измежду числата от 1 до 3, второто да е 4, третото да е измежду числата от 5 до 10)

$= \dfrac{\binom{3}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{18}{120}$

$P(\xi = 5) = P($едното число да е измежду числата от 1 до 4, второто да е 5, третото да е измежду числата от 6 до 10)

$= \dfrac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{20}{120}$

$P(\xi = 6) = P($едното число да е измежду числата от 1 до 5, второто да е 6, третото да е измежду числата от 7 до 10)

$= \dfrac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{20}{120}$

$P(\xi = 7) = P($едното число да е измежду числата от 1 до 6, второто да е 7, третото да е измежду числата от 8 до 10)

$= \dfrac{\binom{6}{1}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{18}{120}$

$P(\xi = 8) = P($едното число да е измежду числата от 1 до 7, второто да е 8, третото да е измежду числата от 9 до 10)

$= \dfrac{\binom{7}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{14}{120}$

$P(\xi = 9) = P($едното число да е измежду числата от 1 до 8, второто да е 9, третото да е 10)

$= \dfrac{\binom{8}{1}\binom{1}{1}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{8}{120}$

Така получихме разпределението на ξ

x	2	3	4	5	6	7	8	9
p	$\frac{8}{120}$	$\frac{14}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{14}{120}$	$\frac{8}{120}$

Математическото очакване е

$$E\xi = 2.\frac{8}{120} + 3.\frac{14}{120} + 4.\frac{18}{120} + 5.\frac{20}{120} + 6.\frac{20}{120} + 7.\frac{18}{120} + 8.\frac{14}{120} + 9.\frac{8}{120}$$
$$= \frac{660}{120} = \frac{11}{2} = 5.5$$

$$P(\xi \geq 7) = P(\xi = 7) + P(\xi = 8) + P(\xi = 9) = \frac{18+14+8}{120} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}.$$

$$P(3 \leq \xi < 7)$$
$$= P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) + P(\xi = 6) = \frac{18+20+20+18}{120} = \frac{76}{120} = \frac{19}{30}.$$

$$P(|\xi - 2| < 2) = P(-2 < \xi - 2 < 2) = P(0 < \xi < 4)$$
$$= P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = \frac{8+14}{120} = \frac{22}{120} = \frac{11}{60}.$$

Законът за разпределение на сл. величина $\eta = (\xi - 2)/5$ е:

x	0	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	7/5
p	$\frac{8}{120}$	$\frac{14}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{14}{120}$	$\frac{8}{120}$

Зад. 5. *Разглеждаме случайна величина за която* $P(\xi = j) = c/3j, j = 0, 1, 2, \ldots$ *Да се намери* c *и да се пресметнат* $P(\xi \geq 10), P(\xi \in A)$, *където* $A = \{j : j = 2k + 1\}$.

Решение:

Константата c определяме от условието $\sum_{j=0}^{\infty} P(\xi = j) = 1$. Така

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c}{3^j} = c\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1,$$

откъдето намираме, че $c = \frac{2}{3}$. Случайната величина ξ има геометрично разпределение.

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 10) &= \sum_{j=10}^{\infty} \frac{2}{3} . \frac{1}{3^j} = \frac{2}{3} \frac{1}{3^{10}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{3^{10}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{10}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\xi \in A) &= \sum_{j \in A} P(\xi = j) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = 2k + 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3} . \frac{1}{3^{2k+1}} \\ &= \frac{2}{3} . \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{2}{9} \frac{9}{8} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Зад. 6. *Двама ловци преследват заек. Първият улучва с вероятност* 0.2, *а вторият с вероятност* 0.3. *Ловците стрелят едновременно. Да се пресметне вероятността първият ловец да убие заека. Какъв е средния брой изстрели необходими за убиването на заека.*

Решение:
Нека A е събитието "първият улучва", B е събитието "вторият улучва". Имаме $P(A) = 0.2, P(B) = 0.3$. Събитията A и B са независими, следователно $P(AB) = 0.2 \times 0.3 = 0.06$. Вероятността при еднократен изстрел първия да убие заека е $P(A) = 0.2$. Вероятността при еднократен изстрел на двамата заедно да бъде убит заека $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.2 + 0.3 - 0.06 = 0.44$.

Ако стрелят двамата заедно то броят изстрели докато бъде уцелен заека е сл. величина с геометрично разпределение

$$P(X = k) = q^{k-1}p, k = 1, 2, \dots, \qquad p = 0.44, \quad q = 0.56.$$

Математическото очакване на тази сл. величина е

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} p.q^{k-1}.k = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p(\sum_{k=1}^{\infty} q^k)'_q = p\left(\frac{q}{1-q}\right)'_q$$

$$= p\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Така $EX = \frac{1}{0.44} = \frac{25}{11} \approx 3$.