Упражнение 5. Схема на Бернули

Основни формули. *Разглеждаме опит с два изхода $U =$"успех" и $N =$"неуспех", които се сбъдват с вероятност $p, 0 < p < 1$ и $q = 1 - p$.*

Ако този опит се изпълни фиксиран брой n пъти, като отделните изпълнения са независими едно от друго се получава сложен опит в който елементарните изходи са всички редици, състоящи се от n букви U и/или N. Такива независими повторения на опит с два изхода се нарича **схема на Бернули** *или* **Бернулиеви опити.** *Всяка редица която има на k места U и на останалите $n - k$ места N се случва с вероятност $p^k q^{n-k}$ поради независимостта на провежданите опити. Такива редици са точно $\binom{n}{k}$ и те съставляват събитието $A(n, k) = \{$случили са се точно k успеха$\}$.*

Така $b(n, k, p) = P(A(n, k)) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ за $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Тези вероятности наричаме биномни вероятности, а съвкупността от тези биномни вероятности наричаме биномно разпределение.

Ако провеждаме независимите опити докато за пръв път се случи успех тогава се получава друг сложен опит с безброй много елементарни изходи и те са

$$U, NU, NNU, NNNU, \ldots N^k U, \ldots$$

техните вероятности са съответно

$$p, qp, q^2 p, \ldots, q^{k-1} p, \ldots$$

Както може да се види $\sum_{k=0}^{\infty} pq^k = \frac{p}{1-q} = 1$.

Нека да провеждаме сложен опит, който се състои в това да повтаряме независимият опит с два изхода докато се сбъднат точно k успеха.

Тогава ясно е че трябва да направим поне k повторения. Да намерим вероятностите на тези елементарни изходи.

Да се случат k - U-та в първите k опита вероятността е p^k.

Да се случат k - U-та и 1 N в първите $k + 1$ опита вероятността за това е $b(k + 1, k, p) = \binom{k+1}{k} p^k q^1$.

Изобщо да се случат k - U-та и n N в първите $k+n$ опита вероятността за това е $b(k + n, k, p) = \binom{k+n}{k} p^k q^n$.

Случайни величини *Нека да разгледаме функция X с дефиниционно множество, множеството от елеменарните изходи от някакъв експеримент Ω, и приемаща реални стойности.*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Такава функция, чиито стойности зависят от случая, се нарича случайна величина.

Ако една случайна величина приема крайно или изброимо много стойности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, тя се нарича дискретна сл. величина.

Събитията $A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots$ образуват пълна група Техните вероятности се означват най-често така:

$$P\{X = x_i\} = P(A_i),\ i = 1, 2, \ldots.$$

Съвкупността от стойностите на случайната величина и съответните им вероятости се нарича разпределение на сл величина X.

За дискретни сл. в. с краен брой стойности е удобно разпределението да бъде предсвавено като таблица:

x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

В разгледаните до тук експериметни имаме:

1. Ако провеждаме един бернулиев опит можем да определим сл. величина $X(U) = 1$ и $X(N) = 0$ и тогава $P(X = 1) = p, P(X = 0) = q$ е разпределението на тази бернулиева сл. в.

2. Ако в серията от n бернулиеви опита определим $X(UUU...NNN) =$броя на U-успехите, то от направните преди разсъждения имаме разпредлението на сл. в. X

$$P(X = k) = b(n, k, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

(Казва се, че сл. величина има **биномно разпределение***.)*

3. В третия разгледан опит да означим с X сл. величина равна на броя на бернулиевите опити извържени до първия успех, т.е.

$$X(\underbrace{N^{k-1}U}) = k, \quad k - 1, 2, 3, \ldots$$

има разпределение

$$P(X=k)=q^{k-1}p, \quad k=1,2,\dots,$$

което се нарича **геометрично разпределение.**

4. В последният експеримент определяме сл. величина $X=$броя на опитите докато се случат точно k успеха. За нейното разпределение имаме

$$P(X=n)=\binom{k+n}{k}p^kq^n, \quad n=k,k+1,k+2,\dots,$$

което се нарича **отрицателно биномно разпределение.**

Задачи.

Зад. 1. *В семейство има десет деца. Ако вероятността за раждане на момче и на момиче е една и съща, да се определи вероятността в това семейство:*
а) да има точно пет момчета;
б) момчетата да са не повече от осем и не по малко от три.
Решение:
Имаме схема на Бернули с $n=10$ и $p=q=1/2$.

а) $P(\text{има точно 5 момчета})=b(10,5,1/2)=\binom{10}{5}2^{-10}$.

б) Нека броят на момчетата означим с K. Тогава

$$P(3\le K\le 8)=b(10,3,1/2)+b(10,4,1/2)+b(10,5,1/2)$$

$$+b(10,6,1/2)+b(10,7,1/2)+b(10,8,1/2)$$

$$=2^{-10}\left(\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}\right)$$

$$=1-2^{-10}\left(\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}\right)=1-2^{-10}(1+10+10+1)$$

$$=1-\frac{22}{2^{10}}=1-\frac{11}{2^9}=1-\frac{11}{512}=\frac{501}{512}.$$

Зад. 2. *Кое е по вероятно при игра с равностоен противник, ако равни партии не са възможни.*
а) Да бъдат спечелени 3 от 4 партии, или 5 от 8.
б) Да бъдат спечелени не по-малко от 3 от 4 партии, или не по-малко от 5 от 8.

Решение:
Считаме, че вероятностите за печалба и за загуба са равни по на 1/2 в отделна партия. Считаме също, че отделните партии са независими. а) Интересуваме се от

$$b(4,3,1/2) = \binom{4}{3} 2^{-4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

и от

$$b(8,5,1/2) = \binom{8}{5} 2^{-8} = \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} \frac{1}{256} = \frac{8.7}{256} = \frac{7}{32} < \frac{1}{4} = \frac{8}{32}.$$

б) Сега пресмятаме
P(спечелени поне 3 от 4) $= b(4,3,1/2) + b(4,4,1/2) = 4/16 + 1/16 = 5/16$ и

P(спечелени поне 5 от 8) $= b(8,5,1/2) + b(8,6,1/2) + b(8,7,1/2) + b(8,8,1/2)$
$= \left(\binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}\right) 2^{-8} = \left(\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} + \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6} + 8 + 1\right)/256$
$= (56 + 28 + 8 + 1)/256 = 93/256.$
Имаме, че $80/256 < 93/256$.

Зад. 3. *Игра са провежда при следните правила. Играчът залага пет лева и има право да хвърли два зара. Ако хвърли две шестици взима 100лв., ако хвърли една шестица взима 5лв. Да се пресметне математическото очакване на печалбата на играча. Справедлива ли е играта.*

Решение:
Играта е справедлива, ако математическото очакване е равно на 0. Имаме три възможни изхода две шестици $(6,6)$ с вероятност $1/36$; една шестица с вероятност $10/36$ и без шестица с вероятност $25/36$. Средната печалба ще е $95.(1/36) + 0.(10/36) + (-5).(25/36) = 95/36 - 125/36 = -30/36$. Играта не е справедлива в този случай.

Зад. 4. *Два зара се хвърлят последователно десет пъти. Каква е вероятността броят на хвърлянията при които на първия зар се падат повече точки отколкото на втория да бъде : точно 4; не повече от 5. Да се намери средната стойност на този брой.*

Решение:
При еднократно хвърляне на два различими зара вероятността точките на първия да са повече от точките на втория е $p = 15/36$. Хвърляме 10 пъти двата зара. Нека да считаме за "Успех", хвърлянията, в които на първия зар точките са повече.

Вероятността за точно 4 успеха тогава е $b(10,4,15/36) = \binom{10}{4}\left(\frac{15}{36}\right)^4\left(\frac{21}{36}\right)^6 = 0.2494$.

Вероятността за най-много 5 успеха е

$$P = b(10,0,15/36) + b(10,1,15/36) + b(10,2,15/36)$$
$$+b(10,3,15/36) + b(10,4,15/36) + b(10,5,15/36) = 0.8046$$

За средната стойност имаме $\sum_{i=0}^{10} i \times b(10,i,15/36) = 10 \times 15/36 = 150/36$

Зад. 5. *Извършва се серия от бернулиеви опити с вероятност за успех при всеки от тях равна на p. Да се пресметне вероятността r-тия успех да настъпи точно на $(k+r)$-тия опит.*

Решение:
Нека да разгледаме събитията

$A = \{$в първите $(k+r-1)$ опита има точно $(r-1)$ "Успеха"$\}$

и

$B = \{$ в $(k+r)$-тия опит имаме успех $\}$.

Тези събития са независими, защото $(k+r)$-тия опит не зависи от предните.
Освен това $AB = \{r$-тия успех натъпва при $(k+r)$-тия опит$\}$.

Имаме $P(A) = b(k+r-1, r-1, p)$ и $P(B) = p$.

Тогава $P(AB) = pb(k+r-1, r-1, p) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k$.

Зад. 6. *Един пушач винаги носи в джоба си по 2 кутии кибрит. Всеки път когато иска да запали, той избира произволна кутия и вади една клечка. След известно време той забелязва, че едната кутия е празна. Каква е вероятността в този момент в другата да са останали точно k клечки, ако първоначално във всяка кутия е имало n клечки.*

Решение:
Нека означим едната кутия с L, а другата с R.

Преди опита, в който човекът ще установи, че кутията L е празна, а в кутията R има k клечки, трябва да се е сбъднало събитието

$A = \{$ в серия от $2n-k$ опита са се случили точно n L-а и $n-k$ R-а$\}$

Вероятността за това е $b(2n-k, n, 1/2) = \binom{2n-k}{n}/\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^{n-k}}$.

За да установи, на следващия опит, който е $2n-k+1$ подред, че L е празна, трябва да се сбъдне събитието $B = \{$извадена е кутията $L\}$, което е с вероятност $1/2$.

Но A и B са независими. Следователно $P(AB) = \binom{2n-k}{n}/\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^{n-k}}.\frac{1}{2}$.

Но поради симетрията, същото може да се случи и с другата кутия и двете събития са несъвместими. Следователно търсената вероятност е

$$P(L\bigcup R) = 2.\binom{2n-k}{n}/\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^{n-k}}.\frac{1}{2} = \binom{2n-k}{n}/\frac{1}{2^n}\frac{1}{2^{n-k}}.$$

Зад. 7. *Разглеждаме редица от бернулиеви опити с вероятност за успех p. Каква е вероятността първият успех да настъпи след петия, но преди осмия опит, ако е известно, че при първите два опита резултатът е неуспех.*

Решение:
За да се сбъдне събитието $A = \{$първият успех е след 5 тия и преди 8-мия опит, ако първите два са неуспешни$\}$ се състои от следните елементарни изходи:

$NN\,NNN\,U$, $NN\,NNN\,NU$ техните вероятности поради независимостта на повторенията са q^5p и q^6p. Така $P(A) = q^5p(1+q)$.

Зад. 8. *Нека $X \in Bi(n,p)$. Коя стойност на X е най-вероятна.*

Решение:
Търсим онова $k = 0, 1, 2, \dots, n$, за което $b(n,k,p)$ е най-голямо. Нека да разгледаме частното

$$\frac{b(n,k+1,p)}{b(n,k,p)}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{1.2\dots k.(k+1)} p^{k+1} q^{n-k-1} / \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k} p^k q^{n-k}$$

$$= \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q}$$

Сега имаме две възможности

$$\frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{q} \geq 1 \Leftrightarrow (n-k)p \geq (k+1)(1-p) \Leftrightarrow$$

$$np \geq kp + k - kp + 1 - p \Leftrightarrow k \leq np + p - 1 \Leftrightarrow k + 1 \leq p(n+1)$$

и

$$\frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{q} \leq 1 \Leftrightarrow (n-k)p \leq (k+1)(1-p) \Leftrightarrow$$

$$np \leq kp + k - kp + 1 - p \geq np + p - 1 \Leftrightarrow k + 1 \geq p(n+1)$$

Следователно

$$\frac{b(n,k+1,p)}{b(n,k,p)} \geq 1$$

за

$$k + 1 \leq p(n+1)$$

и

$$\frac{b(n,k+1,p)}{b(n,k,p)} \leq 1$$

за

$$k + 1 \geq p(n+1).$$

Това показва, че докато $k \leq p(n+1) - 1$, т.е. за $k = 0, 1, 2, \dots [p(n+1)]$ вероятностите $b(n,k,p)$ растат а при $k \geq p(n+1) - 1$, т.е. $k = [p(n+1)], \dots, n$ намаляват. Числото $m = [p(n+1)]$ за което $b(n,m,p)$ е най-голяма е и най-вероятният брой успехи.

Зад. 9. *Нека* $X \in Bi(n,p)$ *и* $Y \in Bi(k,p)$ *са независими случайни величини. Да се намери разпределението на случайната величина* $X+Y$.

Решение:
Случайната величина $X+Y$ е равна на броя на успехите в серия от $n+k$ независими бернулиеви опита с вероятност за успех p. Следователно $P(X+Y=m) = \binom{n+k}{m} p^m q^{n+k-m}, m = 0, 1, 2, \ldots, n+k$..

Зад. 10. *Играч A има n лева и печели всяка партия с вероятност p, а играч B има m лева и печели с вероятност* $q = 1-p$. *Победеният във всяка партия плаща 1 лев на победителя. Да се пресметне вероятността за разоряване на всеки от играчите.*

Решение:
Нека да означим с $p(x)$ вероятността първия играч, да се разори, ако в даден момент има x лева. От условието на задачата имаме, че $p(0) = 1$ (вече се разорил) и $p(n+m) = 0$ (другият се е разорил). Тогава, ако преди дадена партия, първият играч има x лева (той ще се разори с вероятност $p(x)$). След изиграването на партията имаме две хипотези H_1=първият играч печели, H_2=първият играч губи. Така $p(x) = p.p(x+1) + (1-p)p(x-1)$. Нека да предположим, че $p \neq q$. (другото за домашно). Ще решим диференчното уравнение

$$p(x) = p.p(x+1) + (1-p)p(x-1)$$

или

$$p(x+1) - \frac{1}{p}p(x) + \frac{1-p}{p}p(x-1) = 0$$

с начални условия $p(0) = 1$ и $p(n+m) = 0$. Характеристичното уравнение е

$$r^2 - \frac{1}{p}r + \frac{1-p}{p} = 0$$

с корени $r_1 = 1$ и $r_2 = \frac{q}{p}$. Тогава общото решение на диференчното уравнение е

$$p(x) = A.1 + B.\left(\frac{q}{p}\right)^x$$

При $x = 0$ имаме

$$1 = p(0) = A + B,$$

а при $x = n + m$,

$$0 = p(n+m) = A + B.\left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}.$$

От тази система получаваме

$$A = -B.\left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}$$

$$B - B.\left(\frac{q}{p}\right)^{n+m} = 1$$

$$B(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}) = 1$$

$$B = \frac{p^{m+n}}{p^{n+m} - q^{n+m}}$$

$$A = -\frac{q^{m+n}}{p^{n+m} - q^{n+m}}$$

Така

$$p(x) = \frac{p^{m+n}}{p^{n+m} - q^{n+m}} \times \left(\frac{q}{p}\right)^{x} - \frac{q^{m+n}}{p^{n+m} - q^{n+m}}$$

Сега трябва да сметнем тази вероятност при $x = n$. Получаваме

$$p(n) = \frac{p^{m+n}}{p^{n+m} - q^{n+m}} \times \left(\frac{q}{p}\right)^{n} - \frac{q^{m+n}}{p^{n+m} - q^{n+m}}$$

$$= \frac{p^{m+n}q^n - q^{m+n}p^n}{p^n(p^{n+m} - q^{n+m})} = \frac{p^n q^n(p^m - q^m)}{p^n(p^{n+m} - q^{n+m})} = \frac{q^n(p^m - q^m)}{p^{n+m} - q^{n+m}}$$

Така

$$p(n) = \frac{q^n(p^m - q^m)}{p^{n+m} - q^{n+m}}$$

Поради симетрията за другия играч имаме:

$$q(m) = \frac{p^m(q^n - p^n)}{q^{n+m} - p^{n+m}}$$