**УПРАЖНЕНИЯ ПО ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА**

Т а н я Я н к о в а e-mail: *tsvl@abv.bg*

Включват:
- теоретична част към всяка от темите;
- примерни задачи с решения;
- задачи за упражнение с отговори.

## С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е



За улеснение на изчисленията при решаване на задачите от статистика може да бъде използвана програмката GiftStat (http://dox.bg/files/dw?a=804a98ce9b).



## 1. КОМБИНАТОРИКА

*Някои означения*:
Нека $M$ е мн-во от $n$ елемента – $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Елемента $a_i$ можем да заменим с неговия индекс, т.е. $a_i \to i$ и да разглеждаме $M = \{1, 2, \dots, n\}$.

Броя на елементите на мн-вото $M \xrightarrow{озн.} \nu(M)$. В случая $\nu(M) = n$. Ако $\nu(M) = 0$, то $M$ е празно множество ($M = \emptyset$).

Нека $M = \{1, 2, \dots, n\}$ и $M_n^k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq M$. Подмн-вото $M_n^k$ можем да наричаме $k$-торка или извадка с обем $k$. В зависимост от това, дали е от значение подреждането на елементите в $k$-торката и дали елементите в тях могат да се повтарят, се образуват 4 различни мн-ва от $k$-торки:

$K_n^k = \{$ненаредени $k$-торки, без повторение$\}$, $k = \overline{0,n}$;
$\tilde{K}_n^k = \{$ненаредени $k$-торки, с повторение$\}$, $k$ – произволно; } **комбинации**

$B_n^k = \{$наредени $k$-торки, без повторение$\}$, $k = \overline{0,n}$;
$\tilde{B}_n^k = \{$наредени $k$-торки, с повторение$\}$, $k$ – произволно; } **вариации**

При $n = k$ мн-вото $B_n^k \xrightarrow{озн.} \Pi_n$, т.е. $\Pi_n = B_n^n$ } **пермутация**

За броя на елементите на тези мн-ва се използват означенията:

$\nu(\Pi_n) = P_n$; $\nu(K_n^k) = C_n^k$; $\nu(\tilde{K}_n^k) = \tilde{C}_n^k$; $\nu(B_n^k) = V_n^k$; $\nu(\tilde{B}_n^k) = \tilde{V}_n^k$

1. Пермутация на $n$ елемента, без повторение – наредба на $n$ различни елемента.

Бр. на пермутациите от този вид $\xrightarrow{озн.}$ $\boxed{P_n = 1.2\dots n = n!}$

**Пример 1.1** Да се намери броя на 5-цифрените числа, които могат да се запишат с еднократно използване на нечетните цифри 1, 3, 5, 7 и 9.
*Решение*: Броя на 5-цифрените числа е равен на броя различни наредби, които могат да се получат от 5$^{\text{-те}}$ цифри, т.е. $P_5 = 5! = 1.2.3.4.5 = 120$.

**Пример 1.2** Да се намери броя на различните трикольори, които могат да се получат от цветовете бял, зелен и червен.
*Решение*: Броя е равен на броя наредби на 3 елемента, т.е. $P_3 = 3! = 6$.

2. Пермутация на $n$ елемента, с повторение – наредба на $n$ елемента, от които $n_1$ – от 1$^{\text{-ви}}$ тип; $n_2$ – от 2$^{\text{-ри}}$ тип; . . . ; $n_k$ – от $k^{\text{-ти}}$ тип (елементите от всеки тип са неразличими помежду си и $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$).

Бр. на пермутациите от този вид $\xrightarrow{озн.}$ $\boxed{\tilde{P}_n = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}}$

**Пример 1.3** Да се намери броя на 10-цифрените числа, които могат да се получат от нареждането на 10 картончета, като на 2 от картончетата е записана цифрата ‘2’; на 5 – цифрата ‘3’; на 3 – цифрата ‘6’.

*Решение*: Броя на 10-цифрените числа е $\tilde{P}_{10} = \dfrac{10!}{2!\,5!\,3!} = 2520$ .

**Пример 1.4** В кутия има 14 топки, от които 5 бели и 9 червени. Да се намери броя на различните възможни наредби в редица на топките.

*Решение*: Броя на наредбите е $\tilde{P}_{14} = \dfrac{14!}{5!\,9!} = 2002$ .

3. Вариация на $n$ елемента $k^{\text{-ти}}$ клас без повторение – наредба на $k$ елемента, взети от $n$ възможни, без повторение. ( $k = \overline{0,n}$ )

Бр. на вариациите от този вид $\xrightarrow{\text{озн.}}$ $\boxed{V_n^k = n.(n-1)\dots(n-k+1)}$

**Пример 1.5** Да се определи броя на 5-цифрените числа, за които всички цифри са различни и не съдържат цифрата 0.
*Решение*: Търсеният брой числа е равен на броя вариации на 9 елемента (цифрите от 1 до 9) 5 клас $V_9^5 = 9.8.7.6.5 = 15120$ .

4. Вариация на $n$ елемента $k^{\text{-ти}}$ клас с повторение – наредба на $k$ елемента, взети от $n$ възможни, като $\forall$ елемент може да бъде повторен. ($k$ – произволно)

Бр. на вариациите от този вид $\xrightarrow{\text{озн.}}$ $\boxed{\tilde{V}_n^k = n^k}$

**Пример 1.6** Хвърля се зар последователно 4 пъти и всеки път се записва броя паднали се точки. Да се определи броя на възможните различни резултати.
*Решение*: Търсеният брой е равен на броя наредби на 4 елемента, взети от 6 възможни с повторение, т.е. вариация на 6 елемента $4^{\text{-ти}}$ клас с повторение $\tilde{V}_6^4 = 6^4 = 1296$ .

**Пример 1.7** Да се определи броя на възможните различни шифърни номера на 5-цифрова ключалка (всяка цифра може да приема стойност $0 \div 9$).
*Решение*: Търсеният брой е вариация на 10 елемента (цифрите $0 \div 9$) $5^{\text{-ти}}$ клас с повторение $\tilde{V}_{10}^5 = 10^5 = 100\,000$ .

**Пример 1.8** Да се определи броя на възможните различно попълнени единични колонки за Тото 1 (13 срещи).
*Решение*: Търсеният брой е наредба на 3 различни елемента (1, 2 и х) с повторение върху 13 позиции, т.е. вариация на 3 елемента $13^{\text{-ти}}$ клас с повторение $\tilde{V}_3^{13} = 3^{13}$ .

5. Комбинация на $n$ елемента $\kappa^{\text{-ти}}$ клас без повторение – избор на съвкупност от $\kappa$ елемента , взети от $n$ възможни, без повторение. ( $k = \overline{0,n}$ )

Бр. на комбинациите от този вид $\xrightarrow{\text{озн.}}$ $\boxed{C_n^k = \dfrac{n.(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}}$



Упражнения по Вероятности и Статистика – Таня Янкова

<u>Забележка:</u> $C_n^k = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n.(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$ са биномните коефициенти, използвани в математическия анализ. За намирането им може да се използва Триъгълника на Паскал:

$$
\begin{array}{ll}
n=1 & 1\quad 1 \\
n=2 & 1\quad 2\quad 1 \\
n=3 & 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
n=4 & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\
 & \dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

По дефиниция $C_n^0 = 1$. При пресмятането на биномните коефициенти може да се използва свойството им симетричност $C_n^k = C_n^{n-k}$ (например $C_8^6 = C_8^2$ ).

**Пример 1.9** Да се определи броя на възможните различно попълнени единични фишове за тото 2 (6 от 49)?
*Решение*: Всеки попълнен фиш съответства на ненаредена извадка на 6 числа, взети от 49 възможни. Т.е. броя на различните фишове е равен на брой комбинации $C_{49}^6 = \dfrac{49.48.47.46.45.44}{6!} = 13983816$ .

6. Комбинация на $n$ елемента $\kappa^{\text{-ти}}$ клас с повторение – избор на съвкупност от $\kappa$ елемента , взети от $n$ възможни, като всеки елемент може да бъде повторно избран. ($k$ – произволно)

Бр. на комбинациите от този вид $\xrightarrow{\text{озн.}}$ $\boxed{\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k}$

**Пример 1.10** Да се определи броя на възможните различни изходи при едновременно хвърляне на 8 еднакви зара.
*Решение*: Всеки изход при хвърляне съответства на ненаредена извадка на 8 цифри, взети от 6 възможни (цифрите от 1 до 6), като всяка цифра може да се среща многократно в извадката. Т.е. имаме $\tilde{C}_6^8 = C_{6+8-1}^8 = C_{13}^8 = C_{13}^5 = 1287$ .

**Пример 1.11** В кутия има $N$ топки, от които $M$ са бели, а останалите $N-M$ са черни. От кутията се теглят без връщане $n$ топки. Да се определи броя на различните:

а) $n$-торки б) $n$-торки, в които има точно $k$ бели топки.

*Решение*: Това е често срещана схема.

Имаме общо $N$ топки : $M$ – бели ; $N-M$ – черни
теглене <u>без връщане</u> $n$ топки : $k$ ; $n-k$

а) броя на различните $n$-торки е $C_N^n$ .

б) броя на $n$-торките, в които има точно $k$ на брой бели топки е $C_M^k . C_{N-M}^{n-k}$ .

**Пример 1.12** Нека $M$ е мн-во с $n$ елемента, т.е. $\nu(M) = n$. Да се определят броя на елементите на $\beta(M)$ – мн-вото от всички подмн-ва на $M$, включително и празното мн-во $\varnothing$ и самото $M$.

*Решение*: $\beta(M) = M_0 \cup M_1 \cup \ldots \cup M_n$, където $M_k$, $k = \overline{0,n}$ е мн-вото от подмн-ва на $M$, съдържащи $k$ елемента. Тогава $\nu(M_k) = C_n^k$ и получава:

$$\nu(\beta(M)) = \nu(M_0) + \nu(M_1) + \ldots + \nu(M_n) = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n.$$

**ЗАДАЧИ**

**Зад. 1.1** Да се изведат формулите от точки 1 ÷ 6.

**Зад. 1.2** На автобусна спирка минават 6 автобуса с различни номера. Ако всички те минават през еднакъв интервал от време $t$, да се намери броя на възможните наредби на автобусите от даден момент нататък за 1 интервал от време $t$. *Отг.* 720.

**Зад. 1.3** Да се определи броя на различните изпитни билети с по 2 въпроса, които могат да се съставят от конспект с 30 въпроса. *Отг.* 435

**Зад. 1.4** Телефонен номер може да започва с коя да е от цифрите 0 ÷ 9. Да се намери броя на 6-цифрените номера, на които:
а) всички цифри са различни;
б) всички цифри са нечетни. *Отг.* а) 151200 б) 15625

**Зад. 1.5** Да се определи броя на начините, по които могат да се подредят 10 души, ако 3-ма от тях трябва да бъдат един до друг. *Отг.* 241920

**Зад. 1.6** Да се определи броя на различните изходи при хвърлянето на 2 зара, ако заровете са: а) различни б) еднакви. *Отг.* а) 36 б) 21

**Зад. 1.7** Разпределят се 2 червени и 3 зелени топки в 7 различни клетки. Да се определи броя на различните разпределения, ако едноцветните топките са:
а) неразличими б) различими. *Отг.* а) 210 б) 2520

**Зад. 1.8** От тесте с 52 карти се теглят без връщане 5 карти. Да се определи броя на различните изходи, при които са изтеглени:
а) 3 пики б) 3 туза, 1 поп и 1 произволна друга карта.
*Отг.* а) 211926 б) 704

**Зад. 1.9** От тесте с 32 карти се теглят без връщане 3 карти. Да се определи броя на различните изходи, при които са изтеглени:
а) поне 2 туза б) поне една пика.
*Упътване*: б) От общия брой възможни изходи извадете изходите, при които не е изтеглена нито една пика. *Отг.* а) 172 б) 2936

**Зад. 1.10** Какъв е броя на плочките за домино? Да се определи броя на различните 5-торки плочки, за които нито 1 плочка няма по 6 точки в някоя от половините си и броя на различните 5-торки плочки, за които поне 1 плочка има 6 точки в някоя от половините си. *Отг.* 28; 20349; 77931





## 2. СЪБИТИЯ

*Някои означения*:
Нека $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i, \ldots\}$ е мн-вото от възможни изходи на даден опит. Изходите $\omega_i$ се наричат **елементарни изходи** или **елементарни събития**. Мн-вото $\Omega$ се нарича **пространство на елементарните изходи**. Пр-вото $\Omega$ може да бъде:
- **дискретно**, ако се състои от краен или изброим брой елементарни изходи;
- **непрекъснато**, ако се състои от безброй много елементарни изходи.

Когато $\Omega$ е дискретно, броя на елементарните му изходи $\omega_i \xrightarrow{озн.} \nu(\Omega)$.

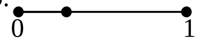
**Пример 2.1**

а) При опит хвърляне на зар, $\Omega$ = {‘1’, ‘2’, . . . , ‘6’} е дискретно, $\nu(\Omega) = 6$;

б) При опит хвърляне на монета, $\Omega$ = {‘Л’, ‘Г’} е дискретно, $\nu(\Omega) = 2$;

в) При опит трикратно, последователно хвърляне на монета, $\Omega$ = {‘ЛЛЛ’, ‘ЛЛГ’, ‘ЛГЛ’, ‘ГЛЛ’, ‘ГГЛ’, ‘ГЛГ’, ‘ЛГГ’, ‘ГГГ’} е дискретно, $\nu(\Omega) = 8$;

г) При случаен избор на точка от отсечка с дължина 1, всяка точка върху отсечката е елементарен изход на пр-вото. $\Omega$ е непрекъснато.




**случайно събитие** – всяко подмн-во на $\Omega$ се нарича случайно събитие:

$A$ – случайно събитие $\Leftrightarrow A \subseteq \Omega$.

(често вместо “случайно събитие” се използва само “събитие”)

Забележка: Елементарните събития са подмн-во на Случайните събития.

**Пример 2.2**

а) При опит хвърляне на зар и пр-во $\Omega$ = {‘1’, ‘2’, . . . , ‘6’}, събитието $A$ = “пада се четно число” представлява $A$ = {‘2’, ‘4’, ‘6’} $\subseteq \Omega$.

б) При опит трикратно, последователно хвърляне на монета и пр-во $\Omega$ = {‘ЛЛЛ’, ‘ЛЛГ’, ‘ЛГЛ’, ‘ГЛЛ’, ‘ГГЛ’, ‘ГЛГ’, ‘ЛГГ’, ‘ГГГ’}, събитието $A$ = “падат се поне 2 герба” представлява $A$ = {‘ГГЛ’, ‘ГЛГ’, ‘ЛГГ’, ‘ГГГ’} $\subseteq \Omega$.

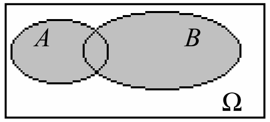
*Използвана терминология:*
- За елементарните изходи, които се съдържат в събитието $A$, казваме че са благоприятни за $A$.
- Казва се, че събитието $A$ е настъпило, ако елементарния изход $\omega_i$, който се реализирал при опита е някой от елементите на $A$.

**невъзможно събитие** – събитие, което никога не се сбъдва, т.е. няма благоприятни изходи $\xrightarrow{озн.} \varnothing$. Тогава $\nu(\varnothing) = 0$.
**достоверно събитие** – събитие, което винаги се сбъдва, т.е. $\forall$ изходи на $\Omega$ са благоприятни за него $\xrightarrow{озн.} \Omega$ (същия символ, както и на самото пр-во).

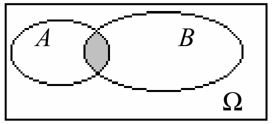
**Пример 2.3** При опит хвърляне на зар и пр-вото $\Omega = \{‘1’, ‘2’, \ldots, ‘6’\}$, събитието $A$ = “падат се ‘8’ точки” е невъзможно, т.е. $A \equiv \varnothing$; събитието $B$ = “броя паднали се точки е число между 1 и 6” е достоверно, т.е. $B \equiv \Omega$.

Забележка: Ако $\nu(\Omega) = n$ и $\beta(\Omega)$ е мн-вото от всички събития в пр-вото $\Omega$, то $\nu(\beta(\Omega)) = 2^n$ (виж Пример 1.12).

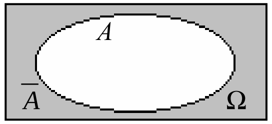
*Операции със събития*:
Ако $A$ и $B$ са събития ($A$, $B \subseteq \Omega$), то могат да бъдат изразени събитията:



обединение – $A \cup B$



сечение – $A \cap B = A.B$



допълнение – $\overline{A}$

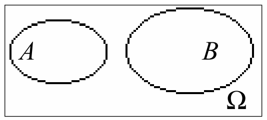
**Пример 2.4** Машина е предназначена да изпълнява 3 операции и се бракува, ако не изпълнява: а) коя да е от трите операции; б) повече от една операция. Ако са означени събитията $A_i$ = “машината изпълнява $i^{\text{-та}}$ операция”, $i = \overline{1,3}$, да се изразят $C$ = “машината се бракува” и $\overline{C}$ = “машината не се бракува”.

*Решение*: а) $C = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3 = \overline{A_1.A_2.A_3}$, $\quad \overline{C} = A_1.A_2.A_3$

б) $C = \overline{A}_1.\overline{A}_2.A_3 \cup \overline{A}_1.A_2.\overline{A}_3 \cup A_1.\overline{A}_2.\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1.\overline{A}_2.\overline{A}_3$,

$\overline{C} = \overline{A}_1.A_2.A_3 \cup A_1.\overline{A}_2.A_3 \cup A_1.A_2.\overline{A}_3 \cup A_1.A_2.A_3$

Събитията $A$ и $B$ са **несъвместими**, ако $A.B = \varnothing$.



$A.B = \varnothing$

**Пример 2.5** За $\forall$ събитие $A$, събитията $A$ и $\overline{A}$ са несъвместими.

Ако $A.B = \varnothing$, то е прието $A \cup B \xrightarrow{\text{озн.}} A+B$.

Изпълнени са: $A.\overline{A} = \varnothing$; $A+\overline{A} = \Omega$.

**Пример 2.6** При опит хвърляне на два $\neq$ зара да се определят елементарните изходи на пр-вото $\Omega$, на събитията $A$ = “сумата от точките е 7”, $B$ = “двата зара са с нечетен брой точки”, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A.\overline{B}$. Съвместими ли са $A$ и $B$?

*Решение*:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1) & \ldots & (1,6) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (6,1) & \ldots & (6,6) \end{matrix}\right\}, \quad A = \left\{\begin{matrix} (1,6) & (2,5) & (3,4) \\ (4,3) & (5,2) & (6,1) \end{matrix}\right\}, \quad B = \left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,3) & (1,5) \\ (3,1) & (3,3) & (3,5) \\ (5,1) & (5,3) & (5,5) \end{matrix}\right\},$$

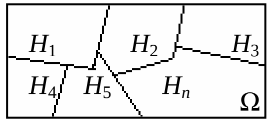
$$\overline{B} = \left\{\begin{matrix} (1,2) & (1,4) & (1,6) \\ (2,1) & \ldots & (2,6) \\ (3,2) & (3,4) & (3,6) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (6,1) & \ldots & (6,6) \end{matrix}\right\}, \quad A \cup B = \left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,3) & (1,5) & (1,6) & (2,5) \\ (3,1) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (4,3) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,5) & (6,1) \end{matrix}\right\}, \quad A.\overline{B} = A.$$





Събитията $A$ и $B$ са несъвместими, т.к. $A.B = \varnothing$.

Събитията $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуват **<u>пълна група събития</u>** (ПГС), ако са изпълнени:
1) $H_i.H_j = \varnothing$ за $\forall\ i \neq j$ ($\forall$ 2 са несъвместими);
2) $\bigcup\limits_{k=1}^{n} H_k = \Omega$ (обединението на всичките е $\Omega$).




**Пример 2.7** Всяко събитие $A$ с допълнението си $\overline{A}$ образува ПГС.

Казваме, че събитието $A$ **<u>се съдържа</u>** в $B$ ($A \subseteq B$), ако от $\omega_i \in A \Rightarrow \omega_i \in B$.
Казваме, че събитията $A$ и $B$ са **<u>еквивалентни</u>** ($A = B$), ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

**Пример 2.8** Ако $A$, $B$ и $C$ са събития ($A$, $B$, $C \subseteq \Omega$), да се докаже, че $A.(B \cup C) = A.B \cup A.C$.

*Решение*: Нека $\omega_i \in A.(B \cup C) \Rightarrow \omega_i \in A \wedge \omega_i \in (B \cup C) \Rightarrow \omega_i \in A \wedge [\omega_i \in B \vee \omega_i \in C] \Rightarrow [\omega_i \in A \wedge \omega_i \in B] \vee [\omega_i \in A \wedge \omega_i \in C] \Rightarrow [\omega_i \in A.B] \vee [\omega_i \in A.C] \Rightarrow \omega_i \in A.B \cup A.C$.
Тогава $A.(B \cup C) \subseteq A.B \cup A.C$ (1)

Нека $\omega_i \in A.B \cup A.C \Rightarrow [\omega_i \in A.B] \vee [\omega_i \in A.C] \Rightarrow [\omega_i \in A \wedge \omega_i \in B] \vee [\omega_i \in A \wedge \omega_i \in C] \Rightarrow \omega_i \in A \wedge [\omega_i \in B \vee \omega_i \in C] \Rightarrow \omega_i \in A \wedge \omega_i \in (B \cup C) \Rightarrow \omega_i \in A.(B \cup C)$.
Тогава $A.B \cup A.C \subseteq A.(B \cup C)$ (2) От (1) и (2) $\Rightarrow$ $A.(B \cup C) = A.B \cup A.C$.

**Пример 2.9** Ако $A$ и $B$ са събития ($A$, $B \subseteq \Omega$), да се докаже, че $\overline{A \cup B} = \overline{A}.\overline{B}$.

*Решение*: Нека $\omega_i \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \omega_i \notin A \cup B \Rightarrow \omega_i \notin A \wedge \omega_i \notin B \Rightarrow \omega_i \in \overline{A} \wedge \omega_i \in \overline{B} \Rightarrow \omega_i \in \overline{A}.\overline{B}$.
Тогава $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A}.\overline{B}$ (1)

Нека $\omega_i \in \overline{A}.\overline{B} \Rightarrow \omega_i \in \overline{A} \wedge \omega_i \in \overline{B} \Rightarrow \omega_i \notin A \wedge \omega_i \notin B \Rightarrow \omega_i \notin A \cup B \Rightarrow \omega_i \in \overline{A \cup B}$.
Тогава $\overline{A}.\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ (2) От (1) и (2) $\Rightarrow$ $\overline{A \cup B} = \overline{A}.\overline{B}$.

Забележка: Еквивалентностите $A.(B \cup C) = A.B \cup A.C$ и $A \cup B.C = (A \cup B).(A \cup C)$ са дистрибутивни закони за събития. Еквивалентностите $\overline{A \cup B} = \overline{A}.\overline{B}$ и $\overline{A.B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ се наричат закони на Де Морган. Законите на Де Морган са изпълнени и за произволен брой събития.

**<u>ЗАДАЧИ</u>**

**Зад. 2.1** Ако $A$, $B$ и $C$ са събития ($A$, $B$, $C \subseteq \Omega$), да се докаже, че $A \cup B.C = (A \cup B).(A \cup C)$.

**Зад. 2.2** Ако $A$ и $B$ са събития ($A$, $B \subseteq \Omega$), да се докаже, че $\overline{A.B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

**Зад. 2.3** Ако $A$, $B$ са събития ($A$, $B \subseteq \Omega$), да се докаже, че събитията $A$, $\overline{A}.B$ и $\overline{A \cup B}$ образуват ПГС.

*Упътване*: Използвайте, че $\overline{A \cup B} = \overline{A}.\overline{B}$.

**Зад. 2.4** Апаратура се състои от 3 блока от $\text{I}^{\text{-ви}}$ тип и 2 блока от $\text{II}^{\text{-ри}}$ тип. Апаратурата може да работи, ако са в изправност поне 2 блока от $\text{I}^{\text{-ви}}$ тип и поне 1 блок от $\text{II}^{\text{-ри}}$ тип. Като се използват събитията $A_i$ = “$i^{\text{-тия}}$ блок от $\text{I}^{\text{-ви}}$ тип е в изправност”, $i = \overline{1,3}$ и $B_j$ = “$j^{\text{-тия}}$ блок от $\text{II}^{\text{-ри}}$ тип е в изправност”, $j = 1,2$, да се изрази събитието $C$ = “апаратурата може да работи”.

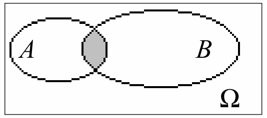
# 3. ВЕРОЯТНОСТ НА СЪБИТИЯ

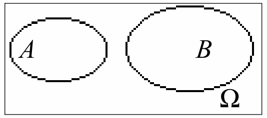
## 3.1. Вероятност в дискретно пространство

Нека пр-вото $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i, \ldots\}$ е дискретно и на $\forall$ елементарен изход $\omega_i \xrightarrow{\text{се съпоставя}}$ число $P(\omega_i)$, $i = 1,2,\ldots$

Числата $P(\omega_i)$, $i = 1,2,\ldots$ се наричат **вероятности** на изходите $\omega_1$, $\omega_2$, … , ако удовлетворяват: 1) $P(\omega_i) > 0$, $i = 1,2,\ldots$ 2) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots = 1$

Ако $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ е събитие ($A \subseteq \Omega$), то **вероятността на събитието** $A$ е $P(A) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + \ldots + P(\omega_{i_k})$.




*Свойства на вероятността*:
- $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$;
- за $\forall$ събитие $A$ ($A \subseteq \Omega$) е изпълнено $0 \le P(A) \le 1$;
- $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
- за $\forall$ 2 събития $A$ и $B$ ($A, B \subseteq \Omega$) е изпълнено $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$;
- за несъвместими $A$ и $B$ ($A.B = \emptyset$) е изпълнено $P(A \cup B) = P(A+B) = P(A) + P(B)$.

## 3.2. Класическа вероятност (частен случай на вероятност в дискретно пр-во)

*Условия за използване*:

1) пр-вото има краен брой елементарни изходи, т.е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$;

2) всички изходи на пр-вото са равновероятни, т.е. $P(\omega_i) = \dfrac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$.

При тези условия, вероятността на събитието $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ ($A \subseteq \Omega$) е

$$P(A) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + \ldots + P(\omega_{i_k}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}, \text{ т.е. } \boxed{P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}}.$$

**Пример 3.1** Да се определи вероятността при хвърляне на правилен зар да се падне ‘6’?

*Решение*: $\Omega$ = {‘1’, ‘2’, . . . , ‘6’}, $\nu(\Omega) = 6$;

$A$ = “пада се ‘6’ ” = {‘6’}, $\nu(A) = 1$; $P(A) = \dfrac{1}{6}$.

**Пример 3.2** Да се определи вероятността при теглене на карта от тесте с 52 карти да се падне “туз”?

*Решение*: $\nu(\Omega) = 52$; $A$ = “изтеглен е “туз” ”, $\nu(A) = 4$; $P(A) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$.

**Пример 3.3** Върху 5 картончета са написани числата ‘1’, ‘2’, … , ‘5’. Теглят се последователно 3 картончета и се нареждат в реда на изтегляне. Каква е вероятността полученото 3-цифрено число да бъде четно?

*Решение*: $\nu(\Omega) = V_5^3 = 5.4.3 = 60$; $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}$

$\boxed{\_}\ \boxed{\_}\ \boxed{\_}$





$A$ = “числото е четно” = $A_2 \cup A_4 = A_2 + A_4$, където $A_i$ = “числото завършва на $i$” и $\nu(A_2) = \nu(A_4) = V_4^2 = 4.3 = 12$. Тогава $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}$

$P(A) = P(A_2 + A_4) = P(A_2) + P(A_4) = 2.P(A_2) =$ $\boxed{\_}\ \boxed{\_}\ \boxed{2}$

$= 2.\dfrac{\nu(A_2)}{\nu(\Omega)} = 2.\dfrac{12}{60} = 0{,}4.$

**Пример 3.4** (виж **Пример 1.11**)

В кутия има общо $N$ на брой елемента, от които $M$ са от I$^{\text{-ви}}$ тип, а останалите ($N - M$) са от II$^{\text{-ри}}$ тип. Теглят се без връщане $n$ елемента (образува се случайна ненаредена извадка без връщане), $n < N$. Да се определи вероятността извадката да съдържа точно $k$ елемента от I$^{\text{-ви}}$ тип.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Решение*: | общо $N$: | $M$ – I$^{\text{-ви}}$ тип | $(N-M)$ – II$^{\text{-ри}}$ тип |
| ненаредена извадка без връщане $n$: | | $k$ | $n-k$ |

$\nu(\Omega) = C_N^n$. $A$ = “извадката съдържа точно $k$ елемента от I$^{\text{-ви}}$ тип”. Броя на благоприятните изходи за $A$ се получава като умножим броя на начините за избор на $k$ от $M$ елемента от I$^{\text{-ви}}$ тип (това е $C_M^k$) и броя на начините за избор на $n - k$ от ($N - M$) елемента са от II$^{\text{-ри}}$ тип (това е $C_{N-M}^{n-k}$). Т.е. $\nu(A) = C_M^k . C_{N-M}^{n-k}$. Тогава $\boxed{P(A) = \dfrac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \dfrac{C_M^k . C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}}$.

Забележки:
- Вероятност от този вид се нарича **хипергеометрична** (ще се разгледа по-нататък).
- В тази схема често се налага да се отбележат кои са възможните стойности на $k$. Оказва се, че това зависи от стойностите на параметрите $N$, $M$ и $n$:

при $n \le M$, $n \le N - M$: $k = \overline{0,n}$ (проверете при $N = 10$, $M = 4$, $n = 3$);

при $n > M$, $n \le N - M$: $k = \overline{0,M}$ (проверете при $N = 10$, $M = 4$, $n = 5$);

при $n \le M$, $n > N - M$: $k = \overline{n-(N-M),n}$ (проверете при $N = 10$, $M = 7$, $n = 5$);

Тази схема може да се използва и при елементи от повече от 2 типа.

**Пример 3.5** На лунапарк има сфера с топки, в които са поставени следните подаръци: 5 пръстена, 9 гривни, 8 гердана, 6 шноли. Да се определи вероятността при избор на 5 топки да се окаже, че те съдържат:

а) 3 пръстена и 2 гривни б) 1 гривна и 2 шноли.

*Решение*:

| а) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | общо 28 топки: | 5 пр. | 9 гр. | 14 други |
| ненаредена извадка без връщане | 5 топки: | 3 пр. | 2 гр. | 0 други |

Означаваме събитието $A$ = “3 пръстена и 2 гривни”. $P(A) = \dfrac{C_5^3 . C_9^2 . C_{14}^0}{C_{28}^5} = \dfrac{1}{273}$.

| б) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | общо 28 топки: | 9 гр. | 6 шн. | 13 други |
| ненаредена извадка без връщане | 5 топки: | 1 гр. | 2 шн. | 2 други |

Означаваме събитието $B$ = “1 гривна и 2 шноли”. $P(B) = \dfrac{C_9^1 . C_6^2 . C_{13}^2}{C_{28}^5} = \dfrac{1}{7}$.

**Пример 3.6** Да се намери вер. при хвърляне на 2 зара сумата от падналите се точки да е поне 11, ако заровете са: а) различими б) неразличими.

*Решение*:

а) $\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & \dots & (1,6) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (6,1) & \dots & (6,6) \end{Bmatrix}$, $\nu(\Omega) = \tilde{V}_6^2 = 6^2 = 36$. Изходите на пр-вото $\Omega$ при различими зарове са равновероятни: $P((i,j)) = \dfrac{1}{36}$ за $\forall\ i,j = \overline{1,6}$.

$A$ = "сумата е поне 11" = {(5,6), (6,5), (6,6)}, $\nu(A) = 3$; $P(A) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

б) $\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & \dots & (1,6) \\ & \ddots & \vdots \\ & & (6,6) \end{Bmatrix}$, $\nu(\Omega) = \tilde{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = \dfrac{7.6}{2} = 21$. Изходите на $\Omega$ при неразличими зарове не са равновероятни, например $P((1,6)) \neq P((6,6))$.

За да се използва формулата за класическа вероятност условно се приема, че заровете се различават и решаването на б) се свежда до решаване на а). Търсените вероятности в а) и б) са еднакви.

Забележка: При ненаредена извадка с повторение винаги елементарните изходи на пр-вото не са равновероятни. За решаването на задачи от този тип условно се въвежда наредба на елементите в извадката.

## ЗАДАЧИ

**Зад. 3.1** Литературно произведение се състои от 5 тома. Да се определи вероятността при случайна наредба на томовете те да се окажат подредени във възходящ или низходящ ред. *Отг.* 1/60

**Зад. 3.2** Хвърлят се 2 зара. Да се определят вероятностите на събитията:
а) "сумата от падналите се точки е 5" б) "двата зара имат ≅ брой точки".
*Отг.* а) 1/9 б) 1/6

**Зад. 3.3** Хвърлят се $n$ зара. Да се определи каква е вероятността сумата от падналите се точки да бъде не по-малка от $6n$-1. *Отг.* $(n+1)/6^n$

**Зад. 3.4** При игра на зарове се печели, когато сумата от точките при хвърлянето на 3 зара надминава 15. Да се определи вероятността за печалба.
*Отг.* 10/216

**Зад. 3.5** От тесте с 32 карти се тегли 1 карта. Да се определи вер. на събитието "изтеглената карта е или *туз* или *пика*". *Отг.* 11/32

**Зад. 3.6** Върху 5 картончета са написани числата '1', '2', … , '5'. Теглят се последователно 3 картончета и се нареждат в реда на изтегляне. Да се определи вероятността полученото 3-цифрено число:
а) да се състои от последователни цифри б) да не съдържа '5'.
*Отг.* а) 1/20 б) 2/5





**Зад. 3.7** От тесте с 52 карти се теглят 4 карти. Да се определят вероятностите на събитията: а) "изтеглени са 3 *пики*";
б) "изтеглени са поне 3 *туза*";
в) "изтеглена е поне 1 червена";
г) "изтеглени са 1 *туз* и 2 *попа*";
д) "изтеглените карти са от една и съща боя (*кари*, *купи* и т.н.)".
*Отг.* а) 858/20825 б) 193/270725 в) 787/833 г) 1056/270725 д) 44/4165

## 3.3. Геометрична вероятност

*Условия за използване*:
1) пр-вото $\Omega$ има безброй много елементарни изходи, който могат да бъдат разглеждани като геометрични обекти (точки, прави, равнини);
2) всички изходи на пространството $\Omega$ са равновероятни.

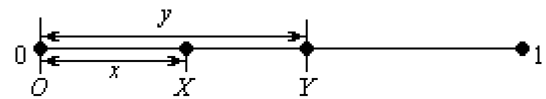
При тези условия, вероятността на събитието $A$ ($A \subseteq \Omega$) е $\boxed{P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}}$,

където с $\mu(X)$ е означена алгебричната мярка на мн-вото $X$.

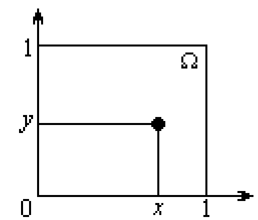
Забележка: При $\Omega \subseteq R^1$, алгебричната мярка представлява дължина, при $\Omega \subseteq R^2$ – лице и при $\Omega \subseteq R^3$ – обем.

**Пример 3.7** Върху отсечка с дължина 1 по случаен начин се избират 2 точки $X$ и $Y$. Да се определи вероятността от 3-те получени отсечки да може да се построи триъгълник.

*Решение*:

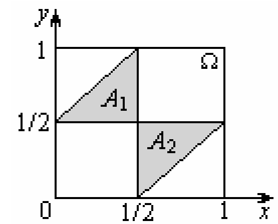



Нека означим $|OX| = x$ и $|OY| = y$, като $0 \le x,\ y \le 1$.
Пр-вото $\Omega$ може да бъде разглеждано като квадрат в $R^2$ със страна 1-ца и $\forall$ избор на 2 точки от отсечката определя точка от квадрата. Мярката на $\Omega$ е лицето на квадрата, т.е. $\mu(\Omega) = 1$.




Ако $x < y$, 3-те отсечки ще имат дължини $x$, $y-x$, $1-y$.
Триъгълник с такива дължини на страните ще $\exists$, ако те удовлетворяват системата:

$$A_1 : \begin{vmatrix} x + y - x > 1 - y \\ x + 1 - y > y - x \\ y - x + 1 - y > x \end{vmatrix} \Rightarrow A_1 : \begin{vmatrix} y > 1/2 \\ x < 1/2 \\ y - x < 1/2 \end{vmatrix}$$




Ако $x > y$, 3-те отсечки ще имат дължини $y$, $x-y$, $1-x$.
Триъгълник с такива дължини на страните ще $\exists$, ако те удовлетворяват системата:

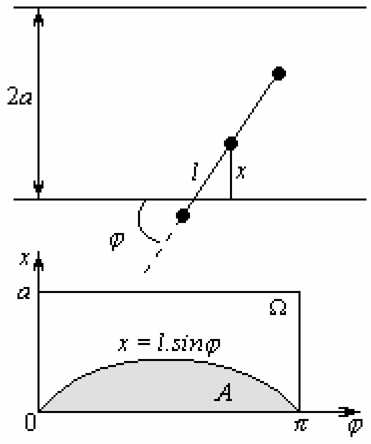
$$A_2 : \begin{vmatrix} y + x - y > 1 - x \\ y + 1 - x > x - y \\ x - y + 1 - x > y \end{vmatrix} \Rightarrow A_2 : \begin{vmatrix} x > 1/2 \\ y < 1/2 \\ x - y < 1/2 \end{vmatrix}$$

Озн. събитието $A$ = "от 3-те отсечки да може да се построи триъгълник". Мярката на $A$ е лицето на фигурата, състояща се от точки в квадрата, удовлетворяващи едната или другата система, т.е. $\mu(A) = \mu(A_1+A_2) = 1/4$.

Тогава $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{1/4}{1} = 1/4$.

**Пример 3.8** (*задача на Бюфон за иглата*)
В равнината са прекарани успоредни прави на разстояние $2a$. Хвърля се игла с дължина $2l$ ($l < a$). Намерете вероятността иглата да пресече някоя от правите.

*Решение*:




Определяме положението на иглата чрез $(\varphi, x)$, където сме означили:

$\varphi$ – острия ъгъл, който иглата сключва с правите;

$x$ – разстоянието от центъра на иглата до най-близката права.

Тъй като $0 \le \varphi \le \pi$ и $0 \le x \le a$, то пр-вото $\Omega$ може да бъде разглеждано като правоъгълник в $R^2$ със страни $a$ и $\pi$, т.е.

$$\Omega: \begin{vmatrix} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le x \le a \end{vmatrix}$$

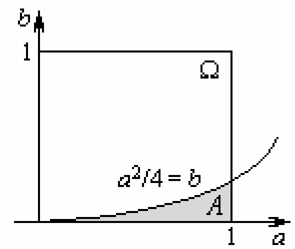
Мярката на пр-вото $\Omega$ е лицето на правоъгълника, т.е. $\mu(\Omega) = a\pi$.

Озн. събитието $A$ = "иглата пресича някоя от правите" = $\{(\varphi, x): x \le l.sin\varphi\}$. Мярката на $A$ е площта между абсцисната ос и синусоидата, т.е.

$$\mu(A) = \int_0^{\pi} l.sin\varphi \, d\varphi = l.cos\varphi \Big|_0^{\pi} = -l.(-1-1) = 2l \text{ . Тогава } P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{2l}{a\pi} .$$

**Пример 3.9** Да се определи вероятността корените на квадратното уравнение $x^2 + ax + b = 0$, $a, b \in [0,1]$ да са реални числа.

*Решение*: Озн. $A$ = "корените са реални числа".




Пространството $\Omega$ може да бъде разглеждано като квадрат в $R^2$:

$$\Omega: \begin{vmatrix} 0 \le a \le 1 \\ 0 \le b \le 1 \end{vmatrix} \qquad A = \{(a, b): a^2/4 \ge b\}$$

Имаме $\mu(\Omega) = 1$, $\mu(A) = \displaystyle\int_0^1 a^2/4 \, da = \frac{a^3}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$.

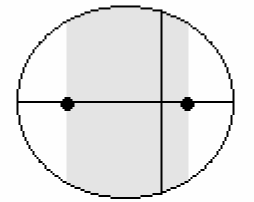
Тогава, по формулата за геометрична вероятност, за вероятността на събитието $A$ получаваме $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{1/12}{1} = \dfrac{1}{12}$.



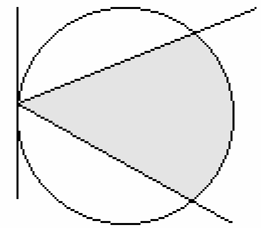


**Пример 3.10** (*Парадокс на Бертран*)
Ако произволно се построи хорда от дадена окръжност, да се определи вероятността дължината на хордата да е по-голяма от дължината на страната на вписания в окръжността правилен триъгълник.

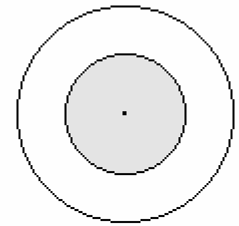
*Решение*:



*I начин*: Положението на хордата се определя от мястото, където тя пресича перпендикулярния ѝ диаметър. Хордите, който пресичат диаметъра в интервала от 1/4 до 3/4 от неговата дължина ще бъдат по-големи от страната на вписания Δ. Следователно търсената вероятност е 1/2.



*II начин*: Положението на хордата се определя от големината на ъгъла, които сключва с допирателната към окръжността в единия си край. Ако изправения ъгъл се раздели на 3 ъгъла от по 60°, то хордите, които попадат в средния ъгъл, ще бъдат по-големи от страната на вписания Δ, т.е търсената вероятност е 1/3.

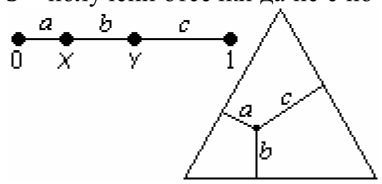


*III начин*: Положението на хордата се определя от положението на нейната среда. Хордите, средите на които попадат във вътрешността на концентрична на дадената окръжност и са с радиус равен на 1/2 от радиуса на дадената окръжност, ще бъдат по-големи от страната на вписания Δ. Тогава търсената вероятност е отношението на лицата на 2-те окръжности и е = 1/4.

<u>Забележка:</u> Нееднозначността на получените отговори е в резултат на недоопределяне в условието на задачата на начина на построяване на хордата, при което с разглеждане на 3 различни постановки на задачата, равновероятните събития могат да се дефинират по 3 различни начина.

## <u>ЗАДАЧИ</u>

**Зад. 3.8** Върху отсечка с дължина 1 по случаен начин се избират 2 точки $X$ и $Y$. Да се определи вероятността нито една от 3-те получени отсечки да не е по-малка от $l$, където $l \in (0, 1/3)$.




*Упътване*: Избора на 2-те точки от отсечката разгледайте като избор на точка от вътрешността на равностранен триъгълник със височина 1-ца (докажете го). Търсената вероятност изразете като отношение на лицата на два подобни триъгълника. *Отг.* $(1 - 3l)^2$

**Зад. 3.9** Двама приятели си уговарят среща на определено място, като всеки от тях пристига в произволен момент между 11 и 12 часа, чака 15 минути и си тръгва, ако другият не се е появил. Да се определи вероятността двамата да се срещнат. *Отг.* 7/16

## 4. УСЛОВНА ВЕРОЯТНОСТ

*Формули*:

Нека събитието $B \neq \varnothing$, т.е. $P(B)>0$.

Вероятността да се сбъдне събитието $A$, ако е известно, че $B$ се е сбъднало $\xrightarrow{\text{озн.}} P(A\backslash B)$ и се нарича **условна вероятност** на $A$ при условие $B$.

**Пример 4.1** Хвърлят се 2 зара. Известно е, че и на $2^{\text{-та}}$ зара са се паднали нечетен брой точки. Да се определи вероятността сумата от точките да е 8.

*Решение*: Озн. $A$ = "сумата е 8", $B$ = "$2^{\text{-та}}$ зара са с нечетен брой точки".

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & \dots & (1,6) \\ \dots & \dots & \dots \\ (6,1) & \dots & (6,6) \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{Bmatrix} (2,6), & \underline{(3,5)}, & (4,4), \\ (6,2), & \underline{(5,3)} & \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,3) & (1,5) \\ (3,1) & (3,3) & \underline{(3,5)} \\ (5,1) & \underline{(5,3)} & (5,5) \end{Bmatrix}$$

Известно е, че се е паднал някой от елементарните изходи на $B$, които общо са 9. Само в 2 от изходите на $B$ сумата от точките е 8. Тогава чрез формулата за класическа вероятност $P(A\backslash B) = \dfrac{2}{9} = \dfrac{\nu(A.B)}{\nu(B)} = \dfrac{\nu(A.B)/\nu(\Omega)}{\nu(B)/\nu(\Omega)} = \dfrac{P(A.B)}{P(B)}$.

Условната вер. на $A$ при условие $B$, $P(B)>0$ се намира по формулата:

[1] $$\boxed{P(A\backslash B) = \frac{\nu(A.B)}{\nu(B)} = \frac{P(A.B)}{P(B)}}$$

Ако $P(A)>0$ и $P(B)>0$ от [1] следва **правилото за умножение на вероятности** за 2 събития:

[2] $$\boxed{P(A.B) = P(B).P(A\backslash B) = P(A).P(B\backslash A)}$$

Забележка: Сечението на 2 събития е комутативно, т.е. $A.B = B.A$ .

Ако $P(A_1.A_2 \dots A_{n-1})>0$ от [2] по индукция се доказва правилото за умножение на вероятности за $n$ събития:

[3] $$\boxed{P(A_1.A_2\dots A_n) = P(A_1).P(A_2\backslash A_1).P(A_3\backslash A_1.A_2) \dots P(A_n\backslash A_1.A_2\dots A_{n-1})}$$

**Пример 4.2** В кутия има 3 бели и 5 черни топки. Последователно, без връщане се изваждат 3 топки. Да се определи вероятността на събитията:

а) първата топка е бяла, а втората е черна;

б) първата и втората топки са еднакъв цвят;

в) трите изтеглени топки са бели.

*Решение*: Озн. събитията $A_i$ = "$i^{\text{-тата}}$ изтеглена топка е бяла" и

$B_i$ = "$i^{\text{-тата}}$ изтеглена топка е черна", $i$ = 1,2,3.

Имаме общо 8 топки: 3 бели 5 черни. Тогава:

а) $P(A_1.B_2) = P(A_1).P(B_2\backslash A_1) = \dfrac{3}{8}.\dfrac{5}{7} = \dfrac{15}{56}$.

б) $P(A_1.A_2 \cup B_1.B_2) = P(A_1.A_2+B_1.B_2) = P(A_1.A_2) + P(B_1.B_2) =$

$= P(A_1).P(A_2\backslash A_1) + P(B_1).P(B_2\backslash B_1) = \dfrac{3}{8}.\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{8}.\dfrac{4}{7} = \dfrac{13}{28}$ (чрез условна вероятност);

или





$= \dfrac{C_3^2.C_5^0}{C_8^2} + \dfrac{C_3^0.C_5^2}{C_8^2} = \dfrac{13}{28}$ (чрез хипергеометрична вероятност).

в) $P(A_1.A_2.A_3) = P(A_1).P(A_2\backslash A_1).P(A_3\backslash A_1.A_2) = \dfrac{3}{8}.\dfrac{2}{7}.\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{56}$.

Събитията $A$ и $B$ са **независими**, ако за тях е изпълнено някое от равенствата:

[4] $P(A\backslash B) = P(A)$

[5] $P(A.B) = P(A).P(B)$

Забележки:

- Равенството [4] означава, че това дали събитието $B$ се е сбъднало, не влияе на вероятността на събитието $A$.
- Равенствата [4] и [5] са еквивалентни.

Д-во: От [4] и [2] $\Rightarrow$ [5], т.е. [4] $\Rightarrow$[5]. От [5] и [2] $\Rightarrow$ [4], т.е. [5] $\Rightarrow$ [4]. Тогава [4] $\equiv$ [5].

- Ако събитията $A$ и $B$ са независими, то независими са $\overline{A}$ и $B$ ; $A$ и $\overline{B}$ ; $\overline{A}$ и $\overline{B}$ .

**Пример 4.3** Ако събитията $A$ и $B$ са независими и $P(A)>0$, $P(B)>0$, да се докаже, че събитията $A$ и $B$ не са несъвместими.

*Решение*: $A$ и $B$ – независими $\overset{[5]}{\Rightarrow}$ $P(A.B) = P(A).P(B) > 0 \Rightarrow A.B \neq \varnothing$.

Събитията $A_1, A_2, \dots , A_n$ се наричат **независими в съвкупност**, ако за $\forall\, \underline{k}$: $2 \le k \le n$ е изпълнено:

[6] $P(A_{i_1}.A_{i_2}\dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}).P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})$, където $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$.

Ако [6] е изпълнено само за $k = 2$, то $A_1, A_2, \dots , A_n$ се наричат **независими 2x2**.

**Пример 4.4** За сигнализиране на авария са поставени 2 независимо работещи апарата. Вероятностите всеки от тях да заработи са съответно 9/10 и 8/10. Да се определи вероятността при авария да заработи

а) само единия апарат; б) поне единия апарат.

*Решение*: Озн. събитията $A_i$ = "$i^{\text{-тия}}$ апарат заработва". Имаме:

$P(A_1) = 9/10$, $P(\overline{A_1}) = 1 - 9/10 = 1/10$;

$P(A_2) = 8/10$, $P(\overline{A_2}) = 1 - 8/10 = 2/10$. От $A_1$ и $A_2$ – независими $\Rightarrow$

а) $P\{$'само единия апарат'$\} = P(A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) =$

$= P(A_1).P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}).P(A_2) = 9/10.2/10 + 1/10.8/10 = 19/100$.

б) $P\{$'поне единия апарат'$\} = P(A_1A_2 \cup A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2) = P(A_1A_2) +$

$+ P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) = P(A_1).P(A_2) + P(A_1).P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}).P(A_2) =$

$= 9/10.8/10 + 9/10.2/10 + 1/10.8/10 = 91/100$.

## ЗАДАЧИ

**Зад. 4.1** В кутия има 6 бели, 5 черни и 3 зелени топки. Последователно се изваждат 3 топки без връщане. Да се определят вер. извадените топки да бъдат $I^{\text{-ва}}$ – бяла, $II^{\text{-ра}}$ – зелена, $III^{\text{-та}}$ – зелена. *Отг.* 3/182

**Зад. 4.2** Двама играчи А и В последователно без връщане теглят по 1 карта от тесте с 32 карти. Да се определят вероятностите:

а) да се изтеглят 2 туза; б) ако А е изтеглил пика, В също да изтегли пика.

*Отг.* а) 3/248 б) 7/31

**Зад. 4.3** В кутия има 3 бели и 2 черни топки. Последователно се изважда по 1 топка, докато се извади черна топка. Да се определи вероятността да се извадят 3 бели топки, ако след изваждането топката:

а) се връща обратно в кутията; б) не се връща. *Отг.* а) 54/625 б) 1/10

**Зад. 4.4** В кутия има 4 жетона. На един от тях двете страни са бели, на втори са черни, а останалите 2 жетона имат по една бяла и по една черна страна. Случайно избран жетон е поставен върху маса и неговата горна страна е бяла. Да се определи вероятността долната да е черна. *Отг.* 2/3

**Зад. 4.5** От тесте с 32 карти се тегли 1 карта. Независими ли са събитията $A$ = ‘картата е *туз*’ и $B$ = ‘картата е *каро*’? *Отг.* независими са

**Зад. 4.6** За независимите събития $A$ и $B$ е известно, че $P(AB)$ = 14/27 и $P(\overline{B})$ = 1/3. Да се определи $P(A)$. *Отг.* 7/9

**Зад. 4.7** Устройство се състои от 3 независимо работещи елемента. Вероятностите за отказ на елементите са съответно 1/9, 3/10 и 2/7. Да се определи вероятността устройството да откаже, ако за това е достатъчно да откаже поне 1 елемент. *Отг.* 5/9

**Зад. 4.8** Трима стрелци стрелят независимо един от друг по мишена. Вероятностите за попадение на тримата са съответно 8/9, 7/10 и 7/8. Ако всеки от тях е стрелял по веднъж, да се определи вероятността мишената да е улучена:

а) само от един стрелец; б) от не повече от двама стрелци.

*Отг.*а) 13/180 б) 41/90

**Зад. 4.9** Да се определи вероятността от 5 хвърляния на зар нито веднъж да не се падне число по-голямо от ‘4’. *Отг.* 32/243

**Зад. 4.10** Двама играчи А и В хвърлят последователно зар и печели този, който пръв хвърли ‘6’. Започва играча А. Да се определят вероятностите на всеки от тях да спечели.

*Упътване*: Използвайте формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия $1 + q + q^2 + \ldots = \dfrac{1}{1-q}$ *Отг.* 6/11 и 5/11

**Зад. 4.11** Да се определи колко пъти трябва да се хвърли зар, т.ч. вероятността да се падне поне една шестица да е по-голяма от 0,9.

*Упътване*: Нека $n$ е необходимия брой хвърляния. Озн. събитията $A$ = ‘от $n^{\text{-те}}$ хвърляния има поне 1 шестица’ и $\overline{A}$ = ‘от $n^{\text{-те}}$ хвърляния няма нито 1 шестица’. Използвайте, че $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. *Отг.* $n \geq 13$



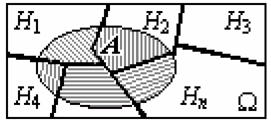


## 5. ФОРМУЛА ЗА ПЪЛНАТА ВЕРОЯТНОСТ И ФОРМУЛА НА БЕЙС

*Формули*:

Ще използваме адитивното свойство, съгласно което ако събитията $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са 2х2 несъвместими, то е изпълнено

[7] $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$




Нека събитията $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуват пълна група събития (ПГС) (виж стр. 7) и $A$ е произволно събитие, т.е. $A \subseteq \Omega$. Тогава за вер. на $A$ получаваме:

$$P(A) = P(A.H_1 + A.H_2 + \ldots + A.H_n) \overset{[7]}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A.H_i) \overset{[2]}{=} \sum_{i=1}^{n} P(H_i).P(A \setminus H_i).$$

$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i).P(A \setminus H_i)}$ се нарича **формула на пълната вероятност**.

**Пример 5.1** В 3 урни има по различен брой топки, разпределени съответно: $\text{I}^{\text{-ва}}$ – 3 бели, 1 черна; $\text{II}^{\text{-ра}}$ – 5 бели, 0 черни; $\text{III}^{\text{-та}}$ – 2 бели, 3 черни. От случайно избрана урна се изважда 1 топка. Да се определи вер. тя да е бяла.

*Решение*: Вер. да се извади бяла топка е различна за $3^{\text{-те}}$ урни. Затова озн. събитията $A$ = ‘извадената топка е бяла’;

$H_i$ = ‘топката е извадена от $i^{\text{-та}}$ урна’, $i$ = 1,2,3.

Събитията $H_1, H_2, H_3$ образуват ПГС.

Тогава $P(A) = P(H_1).P(A \setminus H_1) + P(H_2).P(A \setminus H_2) + P(H_3).P(A \setminus H_3)$, където $P(H_i) = 1/3$, $i = 1,2,3$ и

$\text{I}^{\text{-ва}}$ урна – общо 4: 3 бели, 1 черна $\Rightarrow$ $P(A \setminus H_1) = 3/4$

$\text{II}^{\text{-ра}}$ урна – общо 5: 5 бели, 0 черни $\Rightarrow$ $P(A \setminus H_2) = 5/5 = 1$

$\text{III}^{\text{-та}}$ урна – общо 5: 2 бели, 3 черни $\Rightarrow$ $P(A \setminus H_3) = 2/5$.

Получава се $P(A) = 1/3.3/4 + 1/3.1 + 1/3.2/5 = 43/60$.

Съгласно правилото за умножение на вероятности [2], можем да запишем равенството $P(A.H_k) = P(H_k).P(A \setminus H_k) = P(A).P(H_k \setminus A)$, от което за $P(H_k \setminus A)$ получаваме равенството, което се нарича **Формула на Бейс** :

$$\boxed{P(H_k \setminus A) = \frac{P(H_k).P(A \setminus H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k).P(A \setminus H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i).P(A \setminus H_i)}}.$$

Забележки:

- Формулата на пълната вероятност се използва при определянето на вероятност на събитие, което зависи от група други събития (възможни варианти).
- Формулата на Бейс се използва, когато трябва да се определи вероятност на предхождащо събитие (събитие от пълната група), ако е известно сбъдването на някакво следващо събитие.
- Вероятностите $P(H_1 \setminus A), P(H_2 \setminus A), \ldots, P(H_n \setminus A)$ се наричат **апостериорни**.

**Пример 5.2** В 2 урни има бели и черни топки, които са разпределени съответно: $I^{-ва}$ – 4 бели, 2 черни; $II^{-ра}$ – 1 бяла, 3 черни.
От $I^{-ва}$ урна се изважда 1 топка без да се види цвета и се премества във $II^{-ра}$ урна. След това от $II^{-ра}$ урна се изважда 1 топка. Ако е известно, че извадената топката е бяла, да се определи вер. прехвърлената също да е била бяла.
*Решение*: Озн. $A$ = 'извадената топка е бяла'; $H_1$ = 'прехвърлената топката е бяла'; $H_2$ = 'прехвърлената топката е черна'. Събитията $H_1$ и $H_2$ образуват ПГС. Тогава $P(H_1 \setminus A) = \dfrac{P(H_1).P(A \setminus H_1)}{P(H_1).P(A \setminus H_1) + P(H_2).P(A \setminus H_2)}$, където
$I^{-ва}$ урна – общо 6: 4 бели, 2 черни $\Rightarrow$ $P(H_1) = 4/6$, $P(H_2) = 2/6$,
ако прехвърлената е бяла $II^{-ра}$ урна – общо 5: 2 бели, 3 черни $\Rightarrow P(A \setminus H_1) = 2/5$
ако прехвърлената е черна $II^{-ра}$ урна – общо 5: 1 бяла, 4 черни $\Rightarrow P(A \setminus H_2) = 1/5$
Получава се $P(H_1 \setminus A) = \dfrac{4/6\,.\,2/5}{4/6\,.\,2/5 + 2/6\,.\,1/5} = \dfrac{4}{5}$.

**Пример 5.3** В кутия има 8 топки за тенис – 6 нови, 2 използвани. Двама играчи играят с 3 случайно взети топки от кутията, след което ги връщат. След тях други двама играчи вземат 3 топки от кутията. Да се определи вероятността и $3^{-те}$ топки на $II^{-та}$ двойка играчи да са нови.
*Решение*: Озн. $A$ = '$3^{-те}$ топки на $II^{-та}$ двойка играчи са нови';

$H_1$ = 'топките на $I^{-та}$ двойка играчи са 3 нови' $\Rightarrow P(H_1) = \dfrac{C_6^3}{C_8^3} = 5/14$;

$H_2$ = 'топките на $I^{-та}$ двойка са 2 нови, 1 използвана' $\Rightarrow P(H_2) = \dfrac{C_6^2.C_2^1}{C_8^3} = 15/28$;

$H_3$ = 'топките на $I^{-та}$ двойка са 1 нова, 2 използвани' $\Rightarrow P(H_3) = \dfrac{C_6^1.C_2^2}{C_8^3} = 3/28$.

Събитията $H_1$, $H_2$ и $H_3$ образуват ПГС. Ако се е сбъднало събитието $H_1$, то в кутията са останали 8 топки – 3 нови, 5 използвани $\Rightarrow P(A \setminus H_1) = \dfrac{C_3^3}{C_8^3} = 1/56$.

Аналогично при $H_2$: 8 топки – 4 нови, 4 използвани $\Rightarrow P(A \setminus H_2) = \dfrac{C_4^3}{C_8^3} = 1/14$,

при $H_3$: 8 топки – 5 нови, 3 използвани $\Rightarrow P(A \setminus H_3) = \dfrac{C_5^3}{C_8^3} = 5/28$.

Тогава $P(A) = P(H_1).P(A \setminus H_1) + P(H_2).P(A \setminus H_2) + P(H_3).P(A \setminus H_3) =$
$= 5/14\ .\ 1/56 + 15/28\ .\ 1/14 + 3/28\ .\ 5/28 = 25/392$.

**ЗАДАЧИ**:

**Зад. 5.1** Двама играчи А и В последователно без връщане теглят по 1 карта от тесте с 32 карти. Да се определи вероятността В да изтегли туз.
*Отг.* 1/8



Упражнения по Вероятности и Статистика – Таня Янкова

**Зад. 5.2** В 3 каси има шишета с ябълков сок. Срока на годност на сока в някои от шишетата е изтекъл. Разпределението по касите е следното:
$I^{-ва}$ – 7 годни , 2 негодни; $II^{-ра}$ – 8 годни, 1 негодна; $III^{-та}$ – 5 годни, 1 негодна.
От случайно избрана каса се изважда 1 шише. Да се определят вероятностите:
а) срока на сока в шишето да е изтекъл;
б) ако срока на сока в шишето не е изтекъл, то да е взето от $III^{-та}$ каса.
*Отг.* а) 1/6 б) 1/3

**Зад. 5.3** Магазин за хранителни стоки разполага с 2 каси вино, като в $I^{-ва}$ каса има 5 бутилки бяло и 8 бутилки червено вино, а във $II^{-ра}$ каса има 6 бутилки бяло и 3 бутилки червено вино. От всяка каса е извадена по една бутилка. Да се определи вер. виното в $2^{-те}$ бутилки да е еднакво.
*Отг.* 6/13

**Зад. 5.4** В 2 кутии има бели и черни топки, които са разпределени съответно:
$I^{-ва}$ – 6 бели, 2 черни; $II^{-ра}$ – 3 бели, 2 черни.
От $I^{-ва}$ кутия е прехвърлена 1 топка във $II^{-ра}$ кутия без да се види цвета ѝ. След това от $II^{-ра}$ кутия се изважда 1 топка.
а) да се определи вероятността изтеглена топка от $II^{-ра}$ кутия да е черна;
б) ако е известно, че извадената топката е бяла, да се определи вероятността прехвърлената да е била черна.
*Отг.* а) 3/8 б) 1/5

**Зад. 5.5** Вид детайли се произвежда от 3 завода, като броя на произведените детайли дневно и процента на брака за $3^{-те}$ завода са съответно:
$I^{-ви}$ – 1000 дет./дн., 1%, $II^{-ри}$ – 4000 дет./дн., 2%, $III^{-ти}$ – 3000 дет./дн., 3%.
Със случаен избор е взет 1 детайл. Да се определят вероятностите:
а) детайла да се окаже дефектен;
б) ако детайла се е оказал дефектен, то да е произведен от $II^{-ри}$ завод.
*Отг.* а) 9/400 б) 4/9

**Зад. 5.6** Студент се явява на тест, при който на всеки въпрос има по 4 възможни отговора, от които един верен. Студентът е научил 60% от материала. На въпрос, на който не знае отговора, той отговаря със случаен избор. Ако на $I^{-вия}$ въпрос е отговорил вярно, да се определи вероятността да го е знаел. *Отг.* 6/7

**Зад. 5.7** В 3 кутии има бели и черни топки разпределени съответно:
$I^{-ва}$ – 2 бели, 3 черни; $II^{-ра}$ – 5 бели, 1 черна; $III^{-та}$ – 0 бели, 0 черни.
От $I^{-ва}$ кутия са взети 2 топки, а от $II^{-ра}$ кутия е взета 1 топка и са прехвърлени в $III^{-та}$ кутия. Да се определи вероятността случайно избрана топка от $III^{-та}$ кутия да се окаже черна.
*Упътване*: Изчерпвайки всевъзможните комбинации между $2^{-те}$ топки взети от $I^{-ва}$ кутия и топката от $II^{-ра}$ кутия (за да се опише полученото разпределение на топките в $III^{-та}$ кутия), се получава пълна група от 6 събития. Търсената вероятност се изразява чрез формула за пълната вероятност.
*Отг.* 41/90

## 6. ВЕРОЯТНОСТИ ПРИ РЕДИЦИ ОПИТИ ПО СХЕМА НА БЕРНУЛИ

*Схема на Бернули*:

Нека при провеждането на даден опит пр-вото $\Omega = \{$'*У*', '*Н*'$\}$ се състои само от 2 възможни изхода, условно означени '*Успех*' и '*Неуспех*'. Вер. на тези 2 изхода са $p$ и $q$ : $P$('*У*') $= p$ и $P$('*Н*') $= q$ , като $p + q = 1$, $p, q \in (0,1)$.

**<u>Редица опити по схема на Бернули</u>** се нарича последователност от такива опити, при който: - опитите са независими един от друг ;
- вероятностите $p$ и $q$ са постоянни при всеки опит.

**<u>6.1. Биномна вероятност</u>** (при опити по схема на Бернули).

Вероятността от $n$ опита по схема на Бернули да има точно $k$ на брой '*Успехи*' се означава с $P_n(k)$, смята се по формулата $\boxed{P_n(k) = C_n^k .\, p^k .\, q^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}}$ и се нарича Биномна вероятност.

<u>Забележка</u>: За получаването на тази формула се разгл. редица от $n$ опита по схема на Бернули, чийто резултат е примерно $\{НУУ \dots НУ\}$ като броя на '*Успехите*' е $k$, а на '*Неуспехите*' е $n\!-\!k$. Поради независимостта на опитите и от $P$('*У*') $= p$, $P$('*Н*') $= q$ се получава $P(НУУ \dots НУ) = P(Н).P(У).P(У) \dots P(Н).P(У) = q.p.p \dots q.p = p^k.q^{n-k}$. Т.е. вер. на всяка редица от $n$ опита по схема на Бернули с $k$ на брой '*Успехи*' е $p^k.q^{n-k}$. Измежду всички възможни редици от $n$ опита, броя на редиците с $k$ на брой '*Успехи*' е $C_n^k$. Тогава $P_n(k) = C_n^k .\, p^k .\, q^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}$ .

Съответствието между стойности на $k$ и вероятностите $P_n(k)$ се нарича **<u>Биномно разпределение</u>** и се означава $Bi(n, p)$. $n$ и $p$ са параметрите, които напълно го определят.

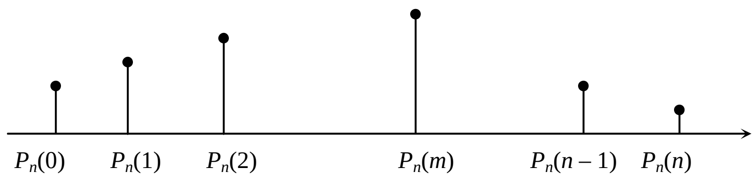
| $k$ | 0 | 1 | ..... | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P_n(k)$ | $P_n(0)$ | $P_n(1)$ | ..... | $P_n(n)$ |

При това $\sum\limits_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$ .

Тъждеството $\sum\limits_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$ , може да се докаже като се използва, че $p + q = 1$ и се развие в биномен ред $(p + q)^n$ :

$$1 = 1^n = (p+q)^n = C_n^0.p^0.q^n + C_n^1.p^1.q^{n-1} + \dots + C_n^n.p^n.q^0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.p^k.q^{n-k}$$

Ако за фиксирани $n$ и $p$ се изчислят биномните вероятности $P_n(k), \quad k = \overline{0,n}$ , се забелязва тенденцията, че по стойност вероятностите първо нарастват, а след това намаляват:



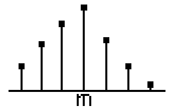


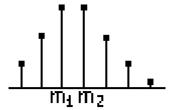

Упражнения по Вероятности и Статистика – Таня Янкова

Определянето за кое $k = m$ при фиксирани $n$ и $p$ се достига максималната биномна вероятност става от $\underset{k=0,n}{Max}\, P_n(k) = P_n(m)$ , където:

цяла част на число

$$m = \begin{cases} [(n+1).p], & \text{ако } (n+1).p \text{ не е цяло} \\ \left| \begin{array}{l} m_1 = (n+1).p - 1 \\ m_2 = (n+1).p \end{array} \right. & \text{ако } (n+1).p \text{ е цяло} \end{cases}$$




<u>Забележки</u>:
- При $(n + 1).p$ – цяло, вероятностите $P_n(m_1) = P_n(m_2)$ и са по-големи от всички останали Биномни вероятности.
- При разглеждането на **случайни величини**, стойността от разпределението, която има максимална вероятност, ще се нарича **<u>Мода</u>** и ще се бележи с *Mo*.

**Пример 6.1** Лекарство помага на 80% от болните. Да се определят:

а) вер. от 5^-ма болни, приемащи лекарството, точно 4^-ма да се излекуват;

б) най-вероятния брой излекувани от 5^-мата.

*Решение*: Разглеждаме редица от $n = 5$ опита по схема на Бернули с $p = P$('*У*') $= P$('*Помага*') $= 0{,}8$ и $q = P$('*Н*') $= P$('*Не помага*') $= 0{,}2$.

а) за търсената вероятност получаваме $P_5(4) = C_5^4 .\, 0{,}8^4 .\, 0{,}2^{5-4} = 0{,}4096$ ;

б) $(n + 1).p = 6.0{,}8 = 4{,}8$ – не е цяло $\Rightarrow$ най-вер. брой излекувани е $[4{,}8] = 4$.

**Пример 6.2** Да се определи вер. от 6 деца да се родят поне 5 момичета като се приеме, че вероятността за раждане на момче и момиче са равни.

*Решение*: Имаме схема на Бернули с $n = 6$ и опита $p = q = 0{,}5$. Ако означим събитията $A$ = 'раждат се поне 5 момичета' = '5 или 6 момичета';

$A_5$ = 'раждат се 5 момичета'; $A_6$ = 'раждат се 6 момичета'.

Тогава $A = A_5 \cup A_6 = A_5 + A_6$ ($A_5$ и $A_6$ са несъвместими) и

$P(A) = P(A_5 + A_6) = P(A_5) + P(A_6) = P_6(5) + P_6(6) = C_6^5 .\, 0{,}5^5 .\, 0{,}5^{6-5} + C_6^6 .\, 0{,}5^6 .\, 0{,}5^{6-6}$

$P(A) = 7/64$.

**Пример 6.3** Да се определи колко Бернулиеви опита трябва да се проведат при вероятност за успех $p = 0{,}8$, т.ч. най-вероятния брой успехи да бъде 51.

*Решение*: Търси се $n$ = ? , т.ч. $[(n + 1).0{,}8] = 51$.

Тъй като $51/0{,}8 = 63{,}75 \quad \Rightarrow \quad n + 1 = 64 \quad \Rightarrow \quad n = 63$

**Пример 6.4** За да е в изправност самолет трябва поне половината от двигателите му да работят. Ако по време на полет, вероятността за повреда на двигател е $q$, да се определи кои самолети са по-сигурни – двумоторните или четиримоторните.

*Решение*: $q$ – вероятността даден двигател да се повреди;
$p = 1 - q$ – вероятността даден двигател да не се повреди.

| за двумоторни самолети | |
|---|---|
| $P_2(1) = C_2^1 pq = 2(1-q)q$ | вер. от 2^-та мотора 1 да не се повреди |
| $P_2(2) = C_2^2 p^2 q^0 = (1-q)^2$ | вер. 2^-та мотора да не се повредят |
| $P_2 = 2q - 2q^2 + 1 - 2q + q^2 = 1 - q^2$ | обща вер. за изправност на самолета |

| за четиримоторни самолети | |
|---|---|
| $P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6(1-q)^2 q^2$ | вер. от 4$^{-те}$ мотора 2-та да не се повредят |
| $P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 4(1-q)^3 q$ | вер. от 4$^{-те}$ мотора 3-те да не се повредят |
| $P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = (1-q)^4$ | вер. 4$^{-те}$ мотора да не се повредят |
| $P_4 = (1-q)^2[6q^2+4q(1-q)+(1-q)^2] =$ $= (1-q^2)(1+2q+3q^2)$ | обща вер. за изправност на самолета |

Определяме за кои стойности на $q$ е изпълнено неравенството $P_4 > P_2$ :
$(1-q^2)(1+2q+3q^2) > 1-q^2 \;\Rightarrow\; q^2(1-3q) > 0 \;\Rightarrow\; q < 1/3$, т.е. извода е, че при $q \in (0, 1/3)$ по-сигурен е четиримоторния самолет.

**<u>6.2. Поасонова вероятност</u>** (при опити по схема на Бернули).

Вероятността от $n$ опита по схема на Бернули да има точно $k$ на брой '*Успехи*' е биномната вероятност $P_n(k) = C_n^k.\, p^k.\, q^{n-k}$, $k = \overline{0,n}$. Когато $n$ е много голямо число, $P_n(k)$ ще се пресмята трудно по тази формула. За случаите, когато при $n \to \infty$, произведението $np \to \lambda$, може да се използва Поасоновото приближение за биномните вероятности:

$P_n(k) = C_n^k.\, p^k.\, q^{n-k} \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \ldots$, т.е. биномната вероятност се

апроксимира от $p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \ldots$, наречена Поасанова вероятност.

Съответствието между стойности на $k$ и вероятности $p_k$ се нарича **<u>Поасоново разпределение</u>** и се озн. $Po(\lambda)$. $\lambda$ е параметъра, който напълно го определя.

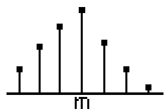
| $k$ | 0 | 1 | ..... | $n$ | ..... |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $p_0$ | $p_1$ | ..... | $p_n$ | ..... |

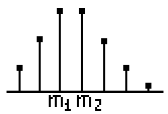
При това $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ .

Вер. от безброй много опити по схема на Бернули да има точно $k$ на брой '*Успехи*', когато предварително е известно, че средния брой '*Успехи*' е $\lambda$, се смята се по формулата $\boxed{p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots}$ и се нарича Поасонова вер.

Ако за фиксирано $\lambda$ се изчислят Поасоновите вер. $p_k$, $k = 0, 1, \ldots$ , (също както и при Биномните), се забелязва, че по стойност те първо нарастват, а след това намаляват. Определянето за кое $k = m$ (при фиксирано $\lambda$) се достига максималната Поасонова вероятност става от $\underset{k=0,1,\ldots}{Max}\; p_k = p_m$ , където:

$$m = \begin{cases} [\lambda], & \text{ако } \lambda \text{ не е цяло} \\ \begin{vmatrix} m_1 = \lambda - 1 \\ m_2 = \lambda \end{vmatrix}, & \text{ако } \lambda \text{ е цяло} \end{cases}$$








**Пример 6.5** В университет се обучават 1460 студента. Да се определи вероятността точно 5 от тях да са родени на 1 януари.
*Решение*: Вероятността един студент да е роден на 1 януари е 1/365. Разглеждаме условието на задачата като редица от $n$ = 1460 опита по схема на Бернули с $p = P$('*У*') = $P$('*роден на 1 януари*') = 1/365. Тогава $\lambda = np$ = 1460/365 = 4 и $P_{1460}(5) \approx \dfrac{4^5}{5!} e^{-4} = 0{,}1563$.

**Пример 6.6** Телефонна станция обслужва 1200 телефонни поста. В даден интервал от време всеки пост, независимо от останалите, може да направи телефонно повикване с вероятност 0,002. Да се определи:

а) вероятността в дадения интервал да имаме не повече от 2 повиквания;

б) най-вероятния брой повиквания в дадения интервал.

*Решение*: Имаме редица от $n$ = 1200 опита по схема на Бернули с вероятност за '*Успех*' в единичен опит $p$ = 0,002. Тогава $\lambda = np$ = 2,4 и вер. в дадения интервал да са направени $k$ повиквания се изразява с $p_k = \dfrac{2{,}4^k}{k!} e^{-2,4}$.

а) $P\{k \le 2\} = p_0 + p_1 + p_2 = e^{-2,4}\left(\dfrac{2{,}4^0}{0!} + \dfrac{2{,}4^1}{1!} + \dfrac{2{,}4^2}{2!}\right) = 0{,}5697$;

б) $\lambda$ = 2,4 не е цяло $\Rightarrow$ най-вероятния брой повиквания е $[\lambda] = [2{,}4] = 2$.

**Пример 6.7** Ако е известно, че средно за една седмица се правят 8 на брой поръчки в фирмен магазин за мебели, да се определят вероятностите през идната седмица да има:

а) точно 5 нови поръчки; б) поне 3 нови поръчки.

*Решение*: Можем да считаме, че имаме редица от безброй много опити по схема на Бернули, като предварително знаем, че средния брой '*Успехи*' е $\lambda$ = 8. Тогава ще бъдат използвани Поасоновите вер. $p_k = \dfrac{8^k}{k!} e^{-8}$, $k = 0, 1, \ldots$ :

а) $p_5 = \dfrac{8^5}{5!} e^{-8} = \dfrac{8^4}{15.e^8}$ ;

б) $P\{k \ge 3\} = 1 - P\{k < 3\} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = 1 - e^{-8}\left(\dfrac{8^0}{0!} + \dfrac{8^1}{1!} + \dfrac{8^2}{2!}\right) = 1 - \dfrac{41}{e^8}$ .

**<u>6.3. Геометрична вероятност</u>** (при опити по схема на Бернули).

Вер. в редица опити по схема на Бернули да има точно $k$ на брой '*Неуспехи*' до I$^{-ия}$ '*Успех*' се смята се чрез $\boxed{p_k = q^k.p,\ k = 0, 1, \ldots}$ и се нарича Геометрична.

<u>Забележка</u>: За получаването на тази формула се разглежда редица опити по схема на Бернули, чийто резултат е примерно {*НН … НУ*} като броя на '*Неуспехите*' до първия '*Успех*' е $k$. Поради независимостта на опитите и от $P$('*У*') = $p$, $P$('*Н*') = $q$ се получава $P(НН \ldots НУ) = P(Н).P(Н) \ldots P(Н).P(У) = q.q \ldots q.p = q^k.p$

Съответствието между стойности на $k$ и вер. $p_k$ се нарича **<u>Геометрично разпределение</u>** и се озн. $G(p)$. $p$ е параметъра, който напълно го определя.

| $k$ | 0 | 1 | ..... | $n$ | ..... |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | $p_0$ | $p_1$ | ..... | $p_n$ | ..... |

При това $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

**Пример 6.8** Вер. мишена да бъде улучена при единичен изстрел е 0,2. Стрелец стреля докато улучи. Да се определят вероятностите да направи:

а) $A$ = '3 неуспешни изстрела до първото попадение';

б) $B$ = 'поне 2 неуспешни изстрела до първото попадение'.

*Решение*: Имаме схема на Бернули с $p = 0{,}2$ и $q = 1 - p = 0{,}8$.

а) $P(A) = q^k.p = 0{,}8^3 . 0{,}2 = 0{,}1024$

б) $\overline{B}$ = 'най-много 1 неуспешен изстрел до първото попадение';

$P(\overline{B}) = p_0 + p_1 = 0{,}8^0 . 0{,}2 + 0{,}8^1 . 0{,}2 = 0{,}36$; $\quad P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0{,}64$.

**ЗАДАЧИ**:

**Зад. 6.1** При $\forall$ изстрел стрелец улучва цел с вер. 1/4. Да се определят вер.:

а) от 10 изстрела да улучи 3 пъти; б) от 8 изстрела да улучи поне веднъж.

*Отг.* а) 32805/131072 б) 58975/65536

**Зад. 6.2** В кутия има 7 бели и 4 черни топки. Последователно с връщане се изваждат 5 топки. Да се определят вер. да се извадят:

а) 3 бели топки; б) поне 2 черни топки.

*Отг.* а) 54880/161051 б) 96224/161051

**Зад. 6.3** В консервен комбинат качеството на 90% от произведените буркани лютеница е "екстра". Комисия по качеството взема със случаен избор 40 буркана. Да се определи:

а) вероятността точно 4 от бурканите да не са "екстра" качество;

б) най-вероятния брой на бурканите измежду взетите, които не са с "екстра" качество. *Отг.* а) $9139.9^{36}/10^{39}$ б) 4

**Зад. 6.4** Известно е, че 75% от изделията на едно предприятие имат специална щампа. Да се определи вероятността от 10 случайно взети изделия поне 8 да имат щампа. *Отг.* $21.3^8/4^9$

**Зад. 6.5** Най-вероятния брой доброкачествени изделия в партида от 60 детайла е 58. Да се определи вероятността $p$ произволно избран детайл да е доброкачествен. *Отг.* $p \in (58/61\ ;\ 59/61)$

**Зад. 6.6** Известно е, че 0,1% от изделията на един завод са II-ро качество. Да се намери най-вероятния брой II-ро качествени изделия измежду 2300 случайно взети за контрол изделия и да се намери съответната вероятност.

*Отг.* $m = 2$ ; $2{,}645/e^{2{,}3}$

**Зад. 6.7** В кутия има 15 непечеливши и 2 печеливши лотарийни билета. Последователно с връщане се вади по 1 билет, докато се извади печеливш. Да се определи вероятността да се извадят точно 3 непечеливши билета.

*Отг.* 6750/83521

**Зад. 6.8** Маршрутът, по който трябва да се движи един автомобил пресича кръстовища със светофари. Всеки от светофарите с вероятност 1/2 разрешава или спира движението. Да се определи вероятността до първото спиране да са преминати поне 3 светофара. *Отг.* 1/8





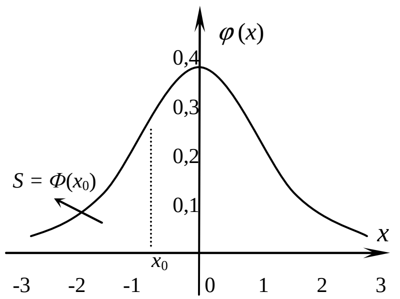
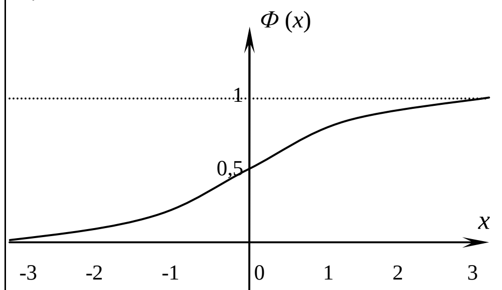
# 7. ЛОКАЛНА И ИНТЕГРАЛНА ГРАНИЧНИ ТЕОРЕМИ

Понякога изчисляването на биномните вероятности, както по формулата $P_n(k) = C_n^k . p^k . q^{n-k}$, $k = \overline{0,n}$, така и с използване на Поасоновото приближение $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \ldots$, (приложимо само в случай, че при $n \to \infty$, произведението $np \to \lambda$) представлява значителна трудност. В такива случаи могат да бъдат използвани други асимптотични формули, известни като **локална гранична теорема** за апроксимация на вероятностите $P_n(k)$ за фиксирано $k$ и **интегрална гранична теорема** за апроксимация на вероятностите $P_n(a \le k \le b)$.

За излагането на тези теореми се налага предварителното въвеждане на две функции. Това са:

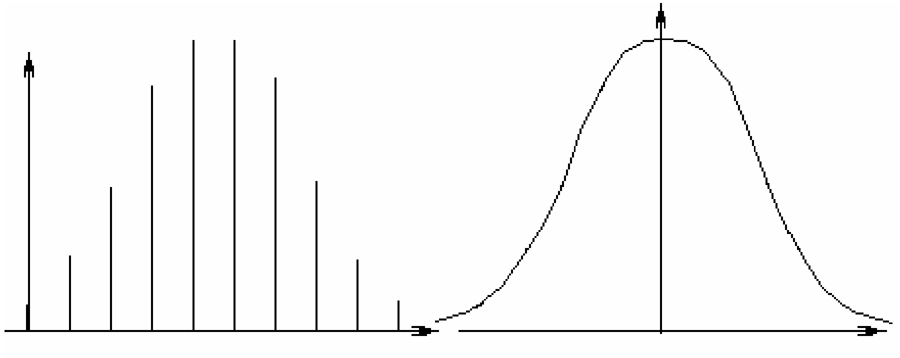
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{и} \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Забележка: За тези две функции ще се говори по-нататък. Засега само ще споменем, че това са плътността и функцията на разпределение на **нормалното разпределение**. Тук във връзка с граничните теореми, ще бъдат разгледани само графиките им и някои от техните свойства.

<table>
<tr><th>$\varphi(x)$</th><th>$\Phi(x)$</th></tr>
<tr><td>Графиката ѝ представлява камбанковидна крива, симетрична относно ординатната ос:<br><br><br>като:<br>$\varphi(-\infty) = \varphi(+\infty) = 0$;<br>$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.</td><td>Графиката ѝ е $s$-образна монотонно нарастваща крива, представляваща натрупването на площта между $\varphi(x)$ и абсцисната ос от $-\infty$ до $x$:<br><br><br>като:<br>$\Phi(-\infty) = 0$; $\quad \Phi(+\infty) = S = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 1$;<br>$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.</td></tr>
</table>

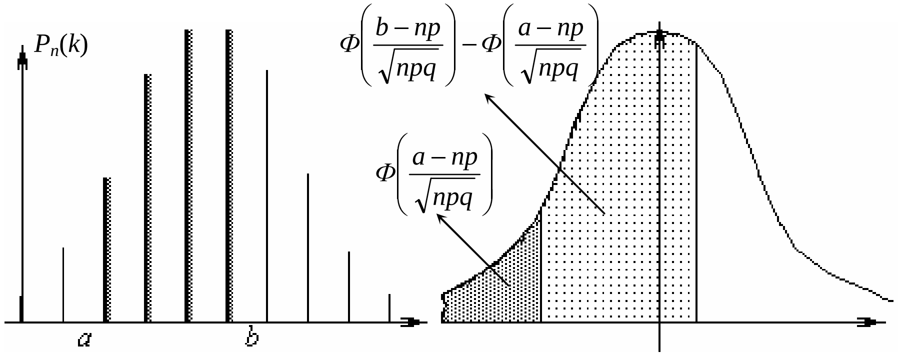
Забележка: За определянето на стойностите на функцията $\Phi(x)$ могат да се използват статистически таблици. В ПРИЛОЖЕНИЕ 1 са дадени стойности на $\Phi(z)$ за $z \ge 0$.

**Локална гранична теорема (Моавър-Лаплас)**: При фиксирано $p$ и $n \to \infty$, биномната вероятност $P_n(k) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$.



**Интегрална гранична теорема**:

$$P_n(a \le k \le b) = \sum_{k=a}^{b} P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\sum_{k=a}^{b}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) \;\to\; \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right).$$




**Пример 7.1** Монета се хвърля 14400 пъти. Да се определи вероятността "Герб" да се падне поне 7428 пъти.

*Решение*: Имаме опити по схема на Бернули, при което $n$ = 14400, $p$ = 1/2. Неудачно е както използването на формулата за биномна вероятност, така и Поасоновото приближение, защото $np$ = 7200 е голямо число. В случая търсената вероятност лесно може да бъде изразена, използвайки интегралната гранична теорема. Тъй като $\sqrt{npq} = \sqrt{3600} = 60$ (където $q = 1 - p = 1/2$), то

$$P_{14400}(7428 \le k \le 14400) \approx \Phi\left(\frac{14400-7200}{60}\right) - \Phi\left(\frac{7428-7200}{60}\right) =$$

$$= \Phi(120) - \Phi(3{,}8) = 1 - \Phi(3{,}8) = 1 - 0{,}999927628 = 0{,}000072372.$$





## 8. СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ – ФУНКЦИЯ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

Нека $\Omega$ е пр-во на елементарните изходи, $\mathcal{B}(\Omega)$ е мн-вото от всички негови подмн-ва, а $\Im \subset \mathcal{B}(\Omega)$ са част от тези подмн-ва. Тогава

$\Im$ е **алгебра**, ако са изпълнени:

1) $\Omega \in \Im$ 2) $A \in \Im \Rightarrow \overline{A} \in \Im$ 3) $A, B \in \Im \Rightarrow A \cup B,\ A.B \in \Im$

$\Im$ е **σ-алгебра**, ако освен 1), 2) и 3) е изпълнено и:

4) $A_1, A_2, \ldots \in \Im \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im$

Двойката $(\Omega, \Im)$, където $\Im$ е σ-алгебра, се нарича **измеримо пространство**.

В $(\Omega, \Im)$ въвеждаме вероятност $P$ като числова функция със свойствата:

A1) $P(A) \ge 0$, за $\forall A \in \Im$

A2) $P(\Omega) = 1$

A3) $A_1, A_2, \ldots$: $A_i.A_j = \varnothing$, при $i \ne j \Rightarrow P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$ (крайноадитивност)

A4) $A_1, A_2, \ldots$: $A_i.A_j = \varnothing$, при $i \ne j \Rightarrow P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ (σ-адитивност)

A5) $B_1, B_2, \ldots$: $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \varnothing \Rightarrow P(B_k) \to 0$ при $k \to \infty$

**Т-ма**: A4) и A5) са еквивалентни.

$(\Omega, \Im, P)$ наричаме вероятностно пространство.

Всяко **измеримо** съответствие $\xi: \Omega \to R$ се нарича **случайна величина**.

Забележка: Съответствието е измеримо, ако за $\forall x \in R$ е изпълнено $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \Im$.

Използва се означението $F_\xi(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = P\{\xi < x\}$ и $F_\xi(x)$ се нарича **функция на разпределение** на сл. величина $\xi$.

**Пример 8.1** Хвърля се монета. Величината $\xi$ приема стойност 1, ако се падне 'Л' и стойност 0, ако се падне 'Г'. Т.е. $\Omega$ = {'Л', 'Г'} и $\xi$('Л')=1, $\xi$('Г')=0.

**Пример 8.2** Хвърлят се едновременно 2 зара. Величината $\xi$ приема стойности равни на сумата от точките на двата зара. Да се определят стойностите на $\xi$ и техните вероятности.

*Решение*: При хвърляне на 2 зара пр-вото е $\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1) & \ldots & (1,6) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (6,1) & \ldots & (6,6) \end{matrix}\right\}$, $\nu(\Omega) = 36$.

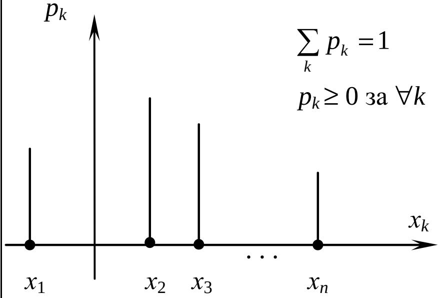
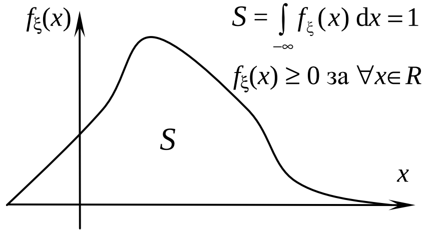
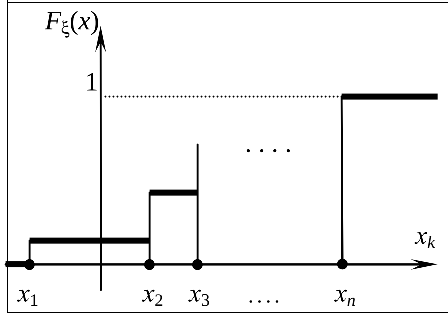
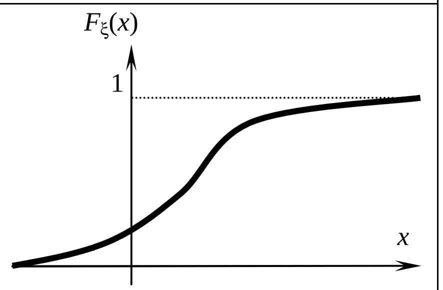
Величината $\xi((a,b)) = a + b$, като $(a,b) \in \Omega$ и $a + b \in R$. Тогава:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A \subseteq \Omega$ | (1,1) | (1,2)<br>(2,1) | (1,3)<br>(2,2)<br>(3,1) | .<br>.<br>. | .<br>.<br>. | .<br>.<br>. | .<br>.<br>. | .<br>.<br>. | (4,6)<br>(5,5)<br>(6,4) | (5,6)<br>(6,5) | (6,6) |
| $\xi = k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $P(\xi=k)$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

Така дефинираната величина $\xi$ е сл. величина (приема зададени стойности с определени вероятности).

Съответствието между стойности и вероятности за тях се нарича **закон за разпределение** на сл. величина. Закона за разпределение на една сл. величина може да бъде зададен аналитично, графично или таблично.

В зависимост от пр-вото, в което са дефинирани, сл. величини се делят на 2 вида – **дискретни** и **непрекъснати**.

<table>
<tr><th colspan="4">дискретни сл. величини</th><th>непрекъснати сл. величини</th></tr>
<tr><td colspan="4">- приемат изброим брой стойности</td><td>- приемат стойности в цял интервал от числовата ос</td></tr>
<tr><td>$\xi = x_k$</td><td>$x_1$</td><td>$x_2$</td><td>. . .</td><td rowspan="2">Зависимостта между стойностите на сл. величина и техните вероятности се задава с функция, наречена плътност на разпределение.</td></tr>
<tr><td>$p_k=P(\xi=x_k)$</td><td>$p_1$</td><td>$p_2$</td><td>. . .</td></tr>
<tr><td colspan="4"><br>$\sum_k p_k = 1$<br>$p_k \geq 0$ за $\forall k$<br>$P(a \leq \xi \leq b) = \sum_{k=a}^{b} p_k$</td><td><br>$S = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = 1$<br>$f_\xi(x) \geq 0$ за $\forall x \in R$<br>$P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f_\xi(x)\,\mathrm{d}x$</td></tr>
<tr><td colspan="5">Функцията на разпределение $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$ се определя чрез:</td></tr>
<tr><td colspan="4">$F_\xi(x) = \sum_{k: x_k < x} p_k$</td><td>$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t$</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td></td></tr>
</table>

Свойства на $F_\xi(x)$: 1) $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$;

2) за $x_1 < x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$ (монотонно ненамаляваща);

3) $F_\xi(-\infty) = 0$, $F_\xi(\infty) = 1$;





4) $F_\xi(x)$ е непрекъсната отляво;

5) $P\{\xi \geq x\} = 1 - F_\xi(x)$.

Забележка: Често се използва, че $P\{a \leq \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$. При непрекъснати сл. величини неравенствата от $2^{\text{-те}}$ страни на $\xi$ могат да бъдат и строги, и не строги, тъй като се приема, че $P\{\xi = const\} \approx 0$.

**Пример 8.3** Разпределението на сл. величина $\xi$ се определя по формулата $p_k = P(\xi = k) = \dfrac{c}{k(k+1)}$, $k = \overline{1,n}$. Да се определи константата $c$, стойността на $F_\xi(3)$ и вероятността $P\{a \leq \xi \leq b\}$.

*Решение*: $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ и използвайки, че $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ изразяваме

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{c}{k(k+1)} = c\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = c\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= c\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = c\,\frac{n}{n+1} \quad \Rightarrow \quad c\,\frac{n}{n+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{n+1}{n}$$

$$F_\xi(3) = P\{\xi < 3\} = \sum_{k<3} p_k = p_1 + p_2 = \frac{c}{1.2} + \frac{c}{2.3} = c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{n+1}{n}.\frac{2}{3} = \frac{2(n+1)}{3n}$$

$$P\{a \leq \xi \leq b\} = \sum_{k=a}^{b} p_k = \sum_{k=a}^{b} \frac{c}{k(k+1)} = c\sum_{k=a}^{b}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+1}\right).$$

**Пример 8.4** Разпределението на сл. величина $\xi$ се определя от плътността $f_\xi(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$. Да се определи константата $c$, да се изрази $F_\xi(x)$ и да се пресметне вероятността $P\{-1 < \xi < 1\}$.

*Решение*: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = 1$ и изразяваме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = c\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = c.\,arctg\,x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = c\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = c\pi$$

$$\Rightarrow \quad c\pi = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\pi}. \text{ Т.е. } f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

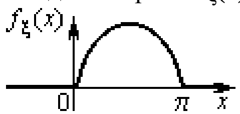
Забележка: За сл. величина с такава плътност се казва, че има разпределение на Коши.

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\,arctg\,t\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(arctg\,x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,arctg\,x\,;$$

$$P\{-1 < \xi < 1\} = F_\xi(1) - F_\xi(-1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

**Пример 8.5** Разпределението на сл. величина $\xi$ се определя от плътността $f_\xi(x)=\begin{cases} c.\sin x, & x\in[0,\pi] \\ 0, & x\notin[0,\pi]\end{cases}$. Да се определи константата $c$ и да се изрази $F_\xi(x)$.




*Решение*: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx=1$ и изразяваме

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{0}0\,dx+\int\limits_{0}^{\pi}c.\sin x\,dx+\int\limits_{\pi}^{+\infty}0\,dx=-c.\cos x\Big|_0^\pi=-c.(-1-1)=2c$$

$$\Rightarrow\ 2c=1\ \Rightarrow\ c=\frac{1}{2}.$$

При $x\le 0$: $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{x}0\,dt=0$;

При $0<x\le\pi$: $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{0}0\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\sin t\,dt=-\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x=\frac{1}{2}(1-\cos x)$;

При $\pi<x$: $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt=\int\limits_{0}^{\pi} f_\xi(t)\,dt=1$.

**Пример 8.6** Сл. величина $\xi$ е непрекъснато разпределена с плътност $f_\xi(x)=\dfrac{c}{e^{-x}+e^{x}}$. Да се определи константата $c$ и да се пресметне вероятността при 2 независими наблюдения над $\xi$, тя да приеме стойност < 1.

*Решение*:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx=c\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}=c\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x dx}{1+(e^x)^2}=c\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{de^x}{1+(e^x)^2}=c.\mathrm{arctg}\,e^x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=c\frac{\pi}{2}$$

Тогава от $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx=1\ \Rightarrow\ c\dfrac{\pi}{2}=1\ \Rightarrow\ c=\dfrac{2}{\pi}$.

$$F_\xi(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dt}{e^{-t}+e^{t}}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^t dt}{1+(e^t)^2}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{de^t}{1+(e^t)^2}=$$

$$=\frac{2}{\pi}.\mathrm{arctg}\,e^t\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{2}{\pi}.\mathrm{arctg}\,e^x.$$

Ако $\xi_1$ и $\xi_2$ са 2 независими наблюдения над случайната величина $\xi$, то вер.

$P\{\xi_1<1,\ \xi_2<1\}=[P\{\xi<1\}]^2=[F_\xi(1)]^2=(\frac{2}{\pi}.\,\mathrm{arctg}\ e)^2$.

<u>Забележка</u>: От лекциите могат да бъдат разгледани многомерни сл. величини и независимост на сл. величини.





# <u>9. СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ – ЧИСЛОВИ ХАРАКТЕРИСТИКИ</u>

**<u>9.1. Математическо очакване</u>** (МО) или **<u>средна стойност</u>** $E_\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\,dF_\xi(x)$:

| за дискретни сл. величини | за непрекъснати сл. величини |
|---|---|
| $E_\xi=\sum\limits_k x_k p_k$ | $E_\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\ f_\xi(x)\,dx$ |

Математическото очакване притежава свойствата:

1) $E_C=c$ ($c=const$) 2) $E_{(\xi\pm\eta)}=E_\xi\pm E_\eta$ 3) $E_{(\xi\,\eta)}=E_\xi.E_\eta$

**<u>9.2. Дисперсия</u>** $D_\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-E_\xi)^2 dF_\xi(x)=E(\xi-E_\xi)^2=E(\xi^2)-(E_\xi)^2$

<u>Забележка</u>: Горното равенство се извежда чрез използване на свойствата на МО, т.е. $E(\xi-E_\xi)^2=E\left(\xi^2-2\xi\,E_\xi+(E_\xi)^2\right)=E(\xi^2)-2(E_\xi)^2+(E_\xi)^2=E(\xi^2)-(E_\xi)^2$, като се използва $E(\xi^2)=\sum\limits_k x_k{}^2\ p_k$ – за дискр. и $E(\xi^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2\ f_\xi(x)\,dx$ – за непрек. величини.

| за дискретни сл. величини | за непрекъснати сл. величини |
|---|---|
| $D_\xi=\sum\limits_k(x_k-E_\xi)^2\,p_k$ | $D_\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-E_\xi)^2\ f_\xi(x)\,dx$ |

Дисперсията притежава свойствата:

1) $D_C=0$ 2) $D(c\xi)=c^2D_\xi$ 3) $D_{(\xi\pm\eta)}=D_\xi+D_\eta$

<u>Забележки</u>:

- Получаването на свойство 3) при разлика на случайни величини става чрез: $D_{(\xi-\eta)}=D_\xi+D(-1.\eta)=D_\xi+(-1)^2D_\eta=D_\xi+D_\eta$.
- Дисперсията на една сл. величина представлява средната стойност на квадрата на отклонението на величината от нейното средно, т.е. тя е **<u>мярка за разсейване</u>** на стойностите на величината около тяхното средно.

**Пример 9.1** Да се пресметнат МО $E_\xi$ и дисперсията $D_\xi$ за сл. величина от Пример 8.2 (стр. 27).

*Решение*: Сл. величина е дискретна. Тогава по формулите за дискретни сл. величини имаме $E_\xi=\sum\limits_k k.p_k=2.\dfrac{1}{36}+3.\dfrac{2}{36}+\ldots+12.\dfrac{1}{36}=\dfrac{252}{36}=7$;

$$D_\xi=\sum_k(k-E_\xi)^2\,p_k=(2-7)^2\frac{1}{36}+(3-7)^2\frac{2}{36}+\ldots(12-7)^2\frac{1}{36}=\frac{210}{36}=\frac{35}{6}.$$

**Пример 9.2** Да се пресметнат МО $E_\xi$ и дисперсията $D_\xi$ за дискретната сл. вел. разпределена по закона на Паскал: $p_k=P\{\xi=k\}=\dfrac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$, $a>0$, $k=1,2,\ldots$

*Решение*: От формулата за МО на дискретна сл. величина имаме

$$E_\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k.p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k.\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} = \frac{a}{(1+a)^2}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{a}{1+a}\right)^{k-1} \overset{[8]}{=} \frac{a}{(1+a)^2}.\frac{1}{\left(1-\frac{a}{1+a}\right)^2} = a$$

$$E(\xi^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2.p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2.\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} = \frac{a}{(1+a)^2}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{a}{1+a}\right)^{k-1} \overset{[9]}{=}$$

$$\overset{[9]}{=} \frac{a}{(1+a)^2}.\frac{1+\frac{a}{1+a}}{\left(1-\frac{a}{1+a}\right)^3} = a\,(1+2a)$$

Тогава $D_\xi = E(\xi^2) - (E_\xi)^2 = a\,(1+2a) - a^2 = a\,(1+a)$.

Забележка: Използвана е формулата за безкрайна геометрична прогресия $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ и равенства [8] и [9], получени чрез последователно диференциране на $2^{\text{-те}}$ й страни

[8] $$\sum_{k=1}^{\infty} k.q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \Big|\, .q$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k.q^{k} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

[9] $$\sum_{k=1}^{\infty} k^2.q^{k-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3}$$

**Пример 9.3** Да се пресметнат МО $E_\xi$ и дисперсията $D_\xi$ на разпределената по закона на Коши случайна величина от Пример 8.4 (стр. 29).

*Решение*: Сл. величина е непрекъсната. От формулата имаме

$$E_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x^2}{1+x^2} = \frac{1}{2\pi}\,ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \quad \to \quad \text{не}$$

съществува $\Rightarrow$ $D_\xi$ също не съществува.

**Пример 9.4** Стрелец разполага с 6 патрона. Вероятността да улучи мишена с всеки един от тях е 0,2. Стрелеца стреля, докато улучи или докато му свършат патроните. Ако случайната величина $\xi$ представлява броя на изстрелите, да се определят:

а) закона на разпределение на случайната величина $\xi$;

б) функцията на разпределение $F_\xi(x)$;

в) МО $E_\xi$ и дисперсията $D_\xi$.

*Решение:*

а) Стойностите на $\xi$, т.е. броя на изстрелите, могат да бъдат цифрите от 1 до 6. Вероятностите за стойности 1 ÷ 5 ще се изчисляват подобно на формулата за Геометрична вероятност (**6.3** от стр. 23) : $p_k = q^{k-1}.p$, $k = 1,\ldots,5$, където $p = 0,2$ и $q = 0,8$. Степента на $q$ е $(k-1)^{\text{-ва}}$, защото тук $\xi$ е общия брой на изстрели и в този случай броя на неуспешните ще е с един по-малко.

$p_1 = 0,8^0.\ 0,2 = 0,2$ ;

$p_2 = 0,8^1.\ 0,2 = 0,16$ ;





$p_3 = 0,8^2.\ 0,2 = 0,128$ ;

$p_4 = 0,8^3.\ 0,2 = 0,1024$ ;

$p_5 = 0,8^4.\ 0,2 = 0,08192$.

Вероятността $p_6$ за приемане на последната стойност на $\xi$ може да се пресметне по 2 начина:

$p_6 = 0,8^5 = 0,32768$ или

$p_6 = 1 - (p_1 + \ldots + p_5) = 0,32768$.

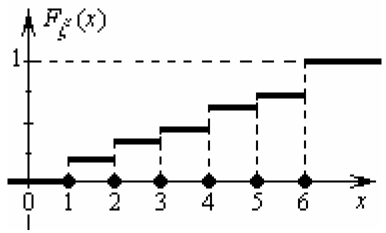
Закона на разпределение е:

| $\xi = k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_k = P\{\xi = k\}$ | 0,2 | 0,16 | 0,128 | 0,1024 | 0,08192 | 0,32768 |

Забележка: Сл. вел. $\xi$ от този пример не принадлежи към геометрично разпределените случайни величини, разгледани в т. 10.4 от следващата тема **10. ОСНОВНИ ДИСКРЕТНИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ**. Разпределението й се отличава от геометричното по това, че стойностите й са краен брой.

б) Случайната величина е дискретна и функцията й на разпределение се смята по формулата $F_\xi(x) = \sum_{k:x_k<x} p_k$ (стр. 28). Тогава:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ 0,2 & 1 < x \le 2 \\ 0,36 = 0,2 + 0,16 & 2 < x \le 3 \\ 0,488 = 0,2 + 0,16 + 0,128 & 3 < x \le 4 \\ 0,5904 = 0,2 + \ldots + 0,1024 & 4 < x \le 5 \\ 0,67232 = 0,2 + \ldots + 0,08192 & 5 < x \le 6 \\ 1 & 6 < x \end{cases}$$




в) $E_\xi = \sum_{k=1}^{6} k.p_k = 1.0,2 + 2.0,16 + 3.0,128 + \ldots + 6.0,32768 = 3,68928$

I н.: $D_\xi = \sum_{k=1}^{6}(k - E_\xi)^2.p_k = (1-3,68928)^2.0,2 + \ldots + (6-3,68928)^2.0,32768 = 3,86409$

II н.: $E_\xi{}^2 = \sum_{k=1}^{6} k^2.p_k = 1^2.0,2 + 2^2.0,16 + 3^2.0,128 + \ldots + 6^2.0,32768 = 17,47488$

$$D_\xi = E(\xi^2) - (E_\xi)^2 == 17,47488 - 3,68928^2 = 17,47488 - 13,61079 = 3,86409\ .$$

**<u>9.3. Начални и централни моменти на случайна величина</u>**

$E(\xi^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\,\mathrm{d}F_\xi(x)$ на сл. величини се нарича **<u>к-ти начален момент</u>**.

$E(\xi - E_\xi)^k = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - E_\xi)^k\,\mathrm{d}F_\xi(x)$ се нарича **<u>к-ти централен момент</u>**.

Забележка: $1^{\text{-ви}}$ начален момент ($k = 1$) съвпада с МО $E_\xi$, а $2^{\text{-ри}}$ централен момент ($k = 2$) съвпада с дисперсията.

**9.4. Стандартно отклонение** се нарича числовата характеристика $\sigma = \sqrt{D_\xi}$ .

**Пример 9.5** Сл. величина $\xi$ е непрекъснато разпределена с плътност $f_\xi(x) = \begin{cases} c.x.\sin x & x \in [0,\pi] \\ 0 & x \notin [0,\pi] \end{cases}$. Да се определи константата $c$ и да се пресметнат МО $E_\xi$ , дисперсията $D_\xi$ и стандартното отклонение $\sigma$.

*Решение*: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} c.x.\sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x = c\int_{0}^{\pi} x.\sin x\,\mathrm{d}x = c\,\mathrm{I}_1 = c\pi$

Тогава от $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = 1 \;\Rightarrow\; c\pi = 1 \;\Rightarrow\; c = \dfrac{1}{\pi}$

$$E_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x.0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{\pi}.x^2.\sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{+\infty} x.0\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2.\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\mathrm{I}_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 - 4\right) = \pi - \frac{4}{\pi};$$

$$E_\xi{}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x^2.0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{\pi}.x^3.\sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{+\infty} x^2.0\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^3.\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\mathrm{I}_3 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi^3 - 6\pi\right) = \pi^2 - 6;$$

$$D_\xi = E(\xi^2) - (E_\xi)^2 = \left(\pi^2 - 6\right) - \left(\pi - \frac{4}{\pi}\right)^2 = \pi^2 - 6 - \pi^2 + 8 - \frac{16}{\pi^2} = 2 - \frac{16}{\pi^2}; \quad \sigma = \sqrt{2 - \frac{16}{\pi^2}},$$

като са използвани интегралите:

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^\pi x.\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi x\,\mathrm{d}\cos x = -\left[x.\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x\right] = -\left[\pi.(-1) - 0.1 - \sin x\Big|_0^\pi\right] = \pi;$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^\pi x^2.\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}\cos x = -\left[x^2.\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x^2\right] = -\left[-\pi^2 - 0 - 2\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \pi^2 + 2\int_0^\pi x.\cos\,\mathrm{d}x = \pi^2 + 2\int_0^\pi x\,\mathrm{d}\sin x = \pi^2 + 2\left[x.\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \pi^2 + 2\left[\pi.0 - 0.0 + \cos x\Big|_0^\pi\right] = \pi^2 + 2\,(-1-1) = \pi^2 - 4;$$

$$\mathrm{I}_3 = \int_0^\pi x^3\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi x^3\mathrm{d}\cos x = -\left[x^3\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x^3\right] = -\left[-\pi^3 - 0 - 3\int_0^\pi x^2\cos x\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \pi^3 + 3\int_0^\pi x^2\cos\,\mathrm{d}x = \pi^3 + 3\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}\sin x = \pi^3 + 3\left[x^2\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x^2\right] =$$

$$= \pi^3 + 3\left[\pi^2.0 - 0.0 - 2\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x\right] = \pi^3 - 6\,\mathrm{I}_1 = \pi^3 - 6\pi.$$





**ЗАДАЧИ**:

**Зад. 9.1** В касичка има 14 монети, от които 4 са по 1 стотинка, 5 – по 2 стотинки, 3 – по 5 стотинки и 2 – по 10 стотинки. Сл. величина $\xi$ представлява стойността на случайно паднала от касичката монета.

а) Да се определи закона на разпределение на случайната величина $\xi$;

б) Да се определи стойността на функцията на разпределение $F_\xi(3)$;

в) Да се определят МО и дисперсията на величината $\xi$.

*Отг.* а)

| $\xi = k$ | 1 | 2 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $p_k = P\{\xi = k\}$ | 4/14 | 5/14 | 3/14 | 2/14 |

б) $F_\xi(3) = 9/14$;

в) $E_\xi = 7/2$; $D_\xi = 255/28$.

**Зад. 9.2** Комисия по проверява качеството на 3 случайно избрани детайли, произведени от смяна работници, докато попадне на некачествен или докато провери и 3-те детайла. Вер. случайно избран детайл да е некачествен е 1/10. Ако случайна величина $\xi$ представлява броя на проверените детайли:

а) да се определи закона на разпределение на случайната величина $\xi$;

б) да се определи вероятността да са проверени поне 2 детайла;

в) да се определи МО и отклонението на величината $\xi$.

*Отг.* а)

| $\xi = k$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p_k = P\{\xi = k\}$ | 1/10 | 9/100 | 81/100 |

б) $P\{\xi \geq 2\} = 9/10$;

в) $E_\xi = 271/100$; $\sigma = \sqrt{4059}/100$ .

**Зад. 9.3** Дневната консумация на питейна вода [милиона куб. м.] в едно селище е сл. вел. $\xi$ с плътност $f_\xi(x) = \begin{cases} 1 - x/6 & \text{при } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{в останалите случаи} \end{cases}$

а) да се намери функцията на разпределение на случайната величина $\xi$;

б) да се определи вероятността $P\{\xi < 3\}$;

в) да се определят МО и дисперсията на $\xi$.

*Отг.*

а) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ -x^2/12 + x - 5/3 & 2 < x \leq 4 \\ 1 & 4 < x \end{cases}$

б) $P\{\xi < 3\} = F_\xi(3) = 7/12$;

в) $E_\xi = 26/9$; $D_\xi = 26/81$.

**Зад. 9.4** Сл. вел. $\xi$ е има плътност $f_\xi(x) = \begin{cases} c.\cos x & x \in [0,\pi/2] \\ 0 & x \notin [0,\pi/2] \end{cases}$. Да се определи константата $c$ и да се пресметнат МО $E_\xi$ , дисперсията $D_\xi$ и стандартното отклонение $\sigma$.

*Отг.* $c = 1$; $E_\xi = \pi/2 - 1$ ; $D_\xi = \pi - 3$; $\sigma = \sqrt{\pi - 3}$ .

# 10. ОСНОВНИ ДИСКРЕТНИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

## 10.1. Бернулиево разпределена сл. величина

| $\xi = k$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P\{\xi = k\}$ | $q$ | $p$ |

$p + q = 1$

$E_\xi = p$ $\qquad$ $D_\xi = p\,(1-p)$ .

**10.2. Биномно разпределена сл. величина *Bi*(*n*, *p*)** – $\xi$ представлява броя '*Успехи*' от $n$ опита по схема на Бернули: $\quad P_n(k) = C_n^k .\, p^k .\, q^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}$

| $\xi = k$ | 0 | 1 | … | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P\{\xi = k\} = P_n(k)$ | $P_n(0)$ | $P_n(1)$ | … | $P_n(n)$ |

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$$

$E_\xi = n.p$ $\qquad$ $D_\xi = n.p.q = np(1-p)$

**10.3. Поасоново разпределена сл. величина *Po*($\lambda$)** – $\xi$ представлява броя '*Успехи*' от безброй много опити по схема на Бернули (когато средния брой '*Успехи*' е $\lambda$) и се определя от: $\quad p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \lambda > 0, \ k = 0, 1, \ldots$

| $\xi = k$ | 0 | 1 | 2 | … |
|---|---|---|---|---|
| $P\{\xi = k\} = p_k$ | $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | … |

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

$E_\xi = \lambda$ $\qquad$ $D_\xi = \lambda$

**10.4. Геометрично разпределена сл. величина *G*(*p*)** – $\xi$ представлява броя на '*Неуспехите*' по схема на Бернули до 1-вия '*Успех*': $\ p_k = q^k .\, p, \quad k = 0, 1, \ldots$

| $\xi = k$ | 0 | 1 | 2 | … |
|---|---|---|---|---|
| $P\{\xi = k\} = p_k$ | $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | … |

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

$$E_\xi = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} \qquad D_\xi = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Забележка: Друга често срещана интерпретация на Геометричното разпределение е: – $\xi$ представлява общия брой на опитите по схема на Бернули до 1-вия '*Успех*' (включително): $\ p_k = q^{k-1} .\, p, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$

| $\xi = k$ | 1 | 2 | 3 | … |
|---|---|---|---|---|
| $P\{\xi = k\} = p_k$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | … |

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

$$E_\xi = \frac{1}{p} \qquad D_\xi = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

**10.5. Хипергеометрично разпределена сл. величина *HG*(*n*, *N*, *M*)** – $\xi$ представлява броя на елементите от I-ви тип в ненаредена извадка без връщане от $n$ елемента, взета от съвкупност от общо $N$ елемента от 2 типа (по схемата от Пример 3.4, стр. 9): $\quad$ общо $N$ : $\quad M$ – I-ви тип $\quad (N-M)$ – II-ри тип

ненаредена извадка без връщане $n$ : $\quad \xi = k \quad\quad n-k$



Упражнения по Вероятности и Статистика – Таня Янкова

Вер. на $\xi$ се определят от $\ p_k = \dfrac{C_M^k .C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad max\{0, n-(N-M)\} \le k \le min\{n, M\}$.

| $\xi = k$ | $max\{0, n-(N-M)\}$ | … | $min\{n, M\}$ |
|---|---|---|---|
| $P\{\xi = k\} = p_k$ | $p_{max\{0,\, n-(N-M)\}}$ | … | $p_{min\{n,\, M\}}$ |

$$\sum_{k=max\{0,\, n-(N-M)\}}^{min\{n, M\}} p_k = 1$$

$$E_\xi = n\frac{M}{N} \qquad D_\xi = \frac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}$$

Забележка:
В задачи, в които от съвкупност елементи от 2 типа се прави извадка и сл. вел. $\xi$ е броя на изтеглените в извадката елементи от единия тип, често се греши при определянето на това дали разпределението е Биномно *Bi*(*n*, *p*) или Хипергеометрично *HG*(*n*, *N*, *M*). За разграничаването на двете разпределения трябва да се отчете, дали при тегленето на всеки елемент в извадката, вероятността за вземане на елемент от дадения тип е постоянна (т.е. наличие на схемата на Бернули) или е променлива и зависи от промяната в съотношенията на елементите от двата типа (т.е. няма схема на Бернули). Разгледайте внимателно решените по-долу примери 10.1 и 10.2.

**Пример 10.1** В партида има 100 детайла, от които 5 са некачествени. Да се определи МО и дисперсията на сл. величина $\xi$, изразяваща броя на некачествените детайли, измежду 20 случайно избрани.

*Решение*: От условието на задачата се подразбира, че извадката е без връщане. Тогава при всяко теглене на детайл съотношенията на качествените и некачествените детайли останали в партидата ще се променя, което означава, че няма схема на Бернули.

$\xi$ представлява броя на некачествените детайли в извадка без връщане::

общо 100 : $\quad$ 5 – некачествени $\quad$ 95 – качествени

20 : $\quad \xi = k \quad$ 20 – $k$

Тогава $\xi \in HG(20, 100, 5)$ и $\ p_k = \dfrac{C_5^k .C_{95}^{20-k}}{C_{100}^{20}}, \ k = \overline{0, 5}$ . Съгласно формулите за МО и дисперсия на Хипергеометрично разпределена сл. величина

$$E_\xi = 20\frac{5}{100} = 1\,; \qquad D_\xi = \frac{20.5.80.95}{100^2(100-1)} = \frac{76}{99}\,.$$

**Пример 10.2** В партида има детайли, 5% от които са некачествени. Да се определи МО и дисперсията на сл. величина $\xi$, изразяваща броя на некачествените детайли, измежду 20 случайно избрани.

*Решение*: От условието на задачата става ясно, че за всеки избран в извадката детайл вероятността да е некачествен е една и съща и е 0,05. Тогава 20-те последователни опита, състоящи се в теглене на детайл, се извършват по схемата на Бернули. Ако разглеждаме тегленето на некачествен детайл като '*Успех*', то:

$\xi$ представлява броя на '*Успехите*' от 20 опита по схема на Бернули.

Тогава $\xi \in Bi(20;\ 0{,}05)$ и $P_{20}(k) = C_{20}^{k}.0{,}05^{k}.0{,}95^{20-k}$, $k = \overline{0{,}20}$. Съгласно формулите за МО и дисперсия на Биномно разпределена сл. величина

$$E_\xi = 20.0{,}05 = 1; \qquad D_\xi = 20.0{,}05.0{,}95 = 0{,}95.$$

**ЗАДАЧИ**:

**Зад. 10.1** Да се изведат формулите за МО и дисперсия на основните дискретни разпределения.

**Зад. 10.2** Служител в поща обслужва 100 абоната. Вероятността в течение на 5 минути да бъде потърсен от даден абонат е 0,01. Да се определи закона на разпределение и да се пресметнат МО и дисперсията на сл. величина $\xi$, изразяваща броя на абонатите, потърсили служителя в течение на 5 минути. Да се определят вер. в течение на 5 минути служителя да бъде потърсен:

а) от по-малко от 3 абоната; б) поне от 2 абоната.

*Отг.* $E_\xi = 1$; $D_\xi = 0{,}99 \approx 1$; а) $5/2e$; б) $1 - 2/e$

**Зад. 10.3** В парична лотария има 1000 билета, от които 125 са печеливши. Да се определи МО и дисперсията на сл. величина $\xi$, изразяваща броя на печелившите билети, измежду 200 случайно избрани.

*Отг.* $E_\xi = 25$; $D_\xi = 17500/999$

**Зад. 10.4** Монета се хвърля докато се падне '*Герб*'. Да се определи закона на разпределение и да се пресметнат МО и дисперсията на сл. величина $\xi$, изразяваща броя на падналите се '*Лица*'. Да се пресметне $P\{\xi \le 2\}$.

*Отг.* $E_\xi = 1$; $D_\xi = 2$; 7/8

**Зад. 10.5** Стрелец улучва целта с един изстрел с вероятност 1/5. Да се определи закона на разпределение и да се пресметнат МО, дисперсията и станд. отклонение $\sigma$ на сл. величина $\xi$, изразяваща броя на попаденията от 10 изстрела.

*Отг.* $E_\xi = 2$; $D_\xi = 8/5$; $\sigma = \sqrt{8/5}$

**Зад. 10.6** Да се определи закона на разпределение и да се пресметнат МО и дисперсията на сл. величина $\xi$, изразяваща броя на познатите от едно теглене числа в попълнен единичен фиш за ТОТО 2 – '6 от 49'.

*Отг.* $E_\xi = 36/49$; $D_\xi = 5547/9604$

**Зад. 10.7** Пресметнато е, че средния брой на спечелилите 6$^{\text{-ца}}$ от ТОТО 2 за един тираж е 2,3. Ако сл. величина $\xi$ изразява броя на спечелилите 6$^{\text{-ца}}$, да се определи закона на разпределение, да се пресметнат МО и дисперсията на $\xi$. Да се пресметне $P\{\xi \ge 2\}$.

*Отг.* $E_\xi = 2{,}3$; $D_\xi = 2{,}3$; $1 - 3{,}3/e^{2{,}3}$

**Зад. 10.8** Устройство се състои от 5 независимо работещи елемента. Вер. за отказ във всеки елемент е 1/20. Да се определи закона на разпр., да се пресметнат МО и дисперсията на сл. величина $\xi$, изразяваща броя на отказалите елементи от 5-те при едно включване на устройството.

*Отг.* $E_\xi = 1/4$; $D_\xi = 19/80$



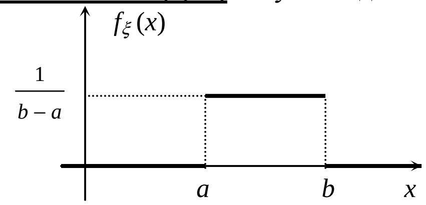


## 11. ОСНОВНИ НЕПРЕКЪСНАТИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

**11.1. Равномерно разпределена сл. величина *U* (*a*, *b*)** – $\xi$ се задава с плътност на разпределение:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

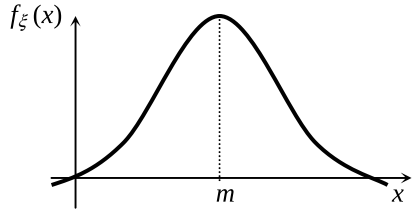
$$E_\xi = \frac{a+b}{2} \qquad D_\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$




**11.2. Нормално разпределена сл. величина *N* (*m*, *σ*)** – $\xi$ се задава с плътност на разпределение:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E_\xi = m \qquad D_\xi = \sigma^2$$

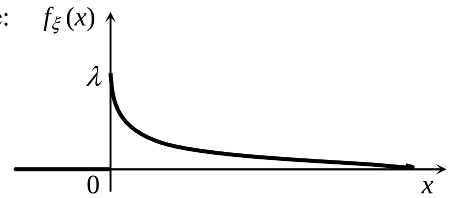



При стойности на параметрите $m = 0$ и $\sigma = 1$, разпределението $N(0,\ 1)$ се нарича **Стандартно нормално разпределение**. За стандартното нормално разпределение е прието функцията на разпределение $F_\xi(x)$ да се означава с $\Phi(x)$ или $\Phi(z)$, а плътността $f_\xi(x)$ да се означава с $\varphi(x)$ или $\varphi(z)$ (виж нормално разпределение на стр. 25). Статистическата таблица със стойности на $\Phi(z)$ за $z \ge 0$ е дадена в ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

**11.3. Експоненциално (показателно) разпределена сл. величина *E*(*λ*)** – $\xi$ се задава с плътност на разпределение:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda.e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$E_\xi = \frac{1}{\lambda} \qquad D_\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$




**ЗАДАЧИ**:

**Зад. 11.1** Да се изведат формулите за МО и дисперсия на основните непрекъснати разпределения.

**Зад. 11.2** Сл. величина $\xi$ има плътност на разпределение:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} A.e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Да се определят параметъра $A$, МО $E_\xi$ и дисперсията $D_\xi$.

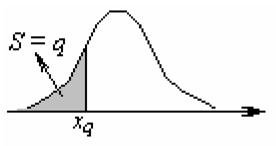
*Отг.* $A = 3$; $E_\xi = 1/3$; $D_\xi = 1/9$

**Зад. 11.3** Сл. величина $\xi$ е равномерно разпределена в интервала [2 ; 5]. Да се определят $E_\xi$, $D_\xi$ и стойностите $F_\xi(1)$, $F_\xi(3)$, $F_\xi(8)$.

*Отг.* $E_\xi = 3{,}5$; $D_\xi = 3/4$; $F_\xi(1) = 0$; $F_\xi(3) = 1/3$; $F_\xi(8) = 1$

## 12. КВАНТИЛИ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЯТА

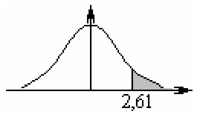
Нека сл. величина има функция на разпределение $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$. Стойността $x_q$ $(0 < q < 1)$ се нарича **q–квантил** на разпределението на $\xi$, ако е изпълнено $F_\xi(x_q) = P\{\xi < x_q\} = q$. Например за непрекъсната сл. величина:

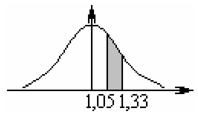


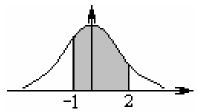

Квантила $x_{0,5}$ се нарича **медиана**.
Квантилите $x_{0,25}$ , $x_{0,50}$ , $x_{0,75}$ се наричат **квартили**.
Квантилите $x_{0,1}$ , $x_{0,2}$ , $x_{0,3}$ , $x_{0,4}$ , $x_{0,5}$ , $x_{0,6}$ , $x_{0,7}$ , $x_{0,8}$ , $x_{0,9}$ се наричат **децили**.

**Пример 12.1** За нормално разпределена сл. величина $\xi \in N\,(m, \sigma)$ медианата $x_{0,5}$ и МО $E_\xi$ съвпадат: $x_{0,5} = E_\xi = m$.

**Пример 12.2** Ако сл. величина $\xi \in N\,(0, 1)$, използвайки статистическата таблица на стандартното нормално разпределение, да се определят вер.:
а) $P\{\xi > 2{,}61\}$; б) $P\{1{,}05 \le \xi \le 1{,}33\}$; в) $P\{-1 \le \xi \le 2\}$.








*Решение*:
а) виж. свойства на $F_\xi(x)$ на стр. 28 и забележката на стр. 29:
$P\{\xi > 2{,}61\} = 1 - P\{\xi \le 2{,}61\} = 1 - \Phi(2{,}61) = 1 - 0{,}995472853 = 0{,}004527147$;
б) виж. забележката на стр. 29:
$P\{1{,}05 \le \xi \le 1{,}33\} = \Phi(1{,}33) - \Phi(1{,}05) = 0{,}908240802 - 0{,}853140919 =$
$= 0{,}055099883$;
в) виж. нормално разпределение на стр. 25, свойството $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$:
$P\{-1 \le \xi \le 2\} = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(2) - 1 + \Phi(1) =$
$= 0{,}977249938 - 1 + 0{,}84134474 = 0{,}818594678$.

**Т-ма**: Ако сл. величина $\xi \in N\,(m, \sigma)$, то сл. величина $\eta = \dfrac{\xi - m}{\sigma} \in N\,(0, 1)$ .

Използвайки тази теорема и статистическа таблица на стандартното нормално разпределение $N\,(0, 1)$ – ПРИЛОЖЕНИЕ 1, могат да бъдат определяни вероятности и квантили на сл. величина $\xi \in N\,(m, \sigma)$.

**Пример 12.3** Ако сл. величина $\xi \in N\,(3, 5)$, да се определят:
а) $P\{\xi > 4{,}65\}$; б) $P\{1 \le \xi \le 2\}$; в) квантила $x_{0,55}$

*Решение*: От теоремата $\Rightarrow$, че величината $\eta = \dfrac{\xi - 3}{5} \in N\,(0, 1)$. Тогава:

а) $P\{\xi > 4{,}65\} = P\left\{\dfrac{\xi - 3}{5} > \dfrac{4{,}65 - 3}{5}\right\} = P\{\eta > 0{,}33\} = 1 - P\{\eta \le 0{,}33\} =$





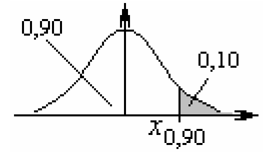
$= 1 - \Phi(0{,}33) = 1 - 0{,}629299955 = 0{,}370700045$ ;

б) $P\{1 \le \xi \le 2\} = P\left\{\dfrac{1-3}{5} \le \dfrac{\xi - 3}{5} \le \dfrac{2-3}{5}\right\} = P\{-0{,}4 \le \eta \le -0{,}2\} =$
$= \Phi(-0{,}2) - \Phi(-0{,}4) = (1 - \Phi(0{,}2)) - (1 - \Phi(0{,}4)) = \Phi(0{,}4) - \Phi(0{,}2) =$
$= 0{,}655421697 - 0{,}579259687 = 0{,}07616201$;

в) $P\{\xi < x_{0,55}\} = 0{,}55 \;\Rightarrow\; P\left\{\dfrac{\xi - 3}{5} < \dfrac{x_{0,55} - 3}{5}\right\} = 0{,}55 \;\Rightarrow\; P\left\{\eta < \dfrac{x_{0,55} - 3}{5}\right\} = 0{,}55$

$\Rightarrow\; \Phi\left(\dfrac{x_{0,55} - 3}{5}\right) = 0{,}55 \;\overset{\text{ПРИЛОЖЕНИЕ1}}{\Rightarrow}\; \dfrac{x_{0,55} - 3}{5} = 0{,}13 \;\Rightarrow\; x_{0,55} = 3{,}65$.

**Пример 12.4** Височината на играчите от баскетболната лига на една страна е нормално разпределена сл. величина $\xi \in N\,(198, 10)$. Ако треньорът на националния отбор е решил, за приемане на нови попълнения, да види играта на 10[-те] % най-високи играчи от лигата, да се определи какъв е минималния ръст на играчите, които ще бъдат поканени.




*Решение*: Търси се квантила $x_{0,90}$ на разпр. на $\xi$.

$P\{\xi < x_{0,90}\} = 0{,}90 \;\Rightarrow\; P\left\{\dfrac{\xi - 198}{10} < \dfrac{x_{0,55} - 198}{10}\right\} = 0{,}90 \;\Rightarrow$

$P\left\{\eta < \dfrac{x_{0,90} - 198}{10}\right\} = 0{,}90 \Rightarrow \Phi\left(\dfrac{x_{0,90} - 198}{10}\right) = 0{,}90 \Rightarrow \dfrac{x_{0,90} - 198}{10} = 1{,}28 \;\Rightarrow x_{0,90} = 110{,}8$.

**ЗАДАЧИ**:

**Зад. 12.1** Ако сл. величина $\xi \in N\,(0, 1)$, използвайки статистическата таблица на стандартното нормално разпределение, да се определят вероятностите:
а) $P\{\xi > -1\}$; б) $P\{2{,}01 \le \xi \le 2{,}36\}$; в) $P\{-1{,}2 \le \xi \le -0{,}2\}$.
*Отг.* а) 0,84134474 б) 0,013078073 в) 0,305670581

**Зад. 12.2** Ако сл. величина $\xi \in N\,(6, 2)$, да се определят:
а) $P\{\xi > 6{,}64\}$; б) $P\{5 \le \xi \le 6{,}3\}$; в) квантила $x_{0,25.}$
*Отг.* а) 0,37448423 б) 0,382924934 в) 4,64

**Зад. 12.3** Продължителността (в часове) на живота на ел. крушки е нормално разпределена сл. величина $\xi \in N\,(2400, 300)$. Да се определи вероятността $P\{2000 < \xi < 2500\}$. *Отг.* 0,537540757

**Зад. 12.4** Почасовото заплащане за вид дейност е нормално разпределена сл. величина $\xi \in N\,(10, 3)$. Да се определи вероятността $P\{\xi < 12\}$.
*Отг.* 0,748571176

**Зад. 12.5** Броят на точките от кандидат-студентски изпит в Софийски ВУЗ е нормално разпределена сл. величина $\xi \in N\,(580, 140)$. Ако ръководството на ВУЗ[-а] е решило да приеме 20[-те] % най-добре представили се кандидати от всички кандидатстващи, да се определи какъв е минималния брой точки, които трябва да има кандидат-студент за да бъде приет.
*Отг.* 699

## 13. ОБЩИ ЗАДАЧИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ

**Зад. 13.1** В 2 урни има бели и черни топки, които са разпределени съответно:
$I^{-ва}$ – 6 бели, 2 черни; $II^{-ра}$ – 3 бяла, 2 черни.
От $I^{-ва}$ урна е прехвърлена 1 топка във $II^{-ра}$ (без да се знае цвета й). Да се определят вероятностите:

а) прехвърлената топка да е черна;

б) изтеглена след прехвърлянето топка от $II^{-ра}$ урна да е черна;

в) прехвърлената топка да е черна, ако изтеглената след прехвърлянето топка от $II^{-ра}$ урна е бяла.

**Зад. 13.2** Машина произвежда детайли като вер. за дефектен детайл е 0,1. Контрольор по качеството проверява произведените детайли, докато се появи дефектен. Ако сл. величина $\xi$ изразява броя на недефектните детайли, да се определят закона на разпределение на $\xi$, МО $E_\xi$, дисперсията $D_\xi$ и $F_\xi(2)$.

**Зад. 13.3** От колода с 32 карти последователно без връщане са изтеглени 3 карти. Да се определят вероятностите:

а) измежду тях да има 2 *дами*;

б) всички да са от една боя (*кари*, *купи* и т.н.);

в) $I^{-вата}$ изтеглена карта да е била *каро*, ако е известно, че $II^{-рата}$ е *каро*.

**Зад. 13.4** Правят се изпитания относно изправността на 8 апарата. Вер. един апарат да е изправен е 7/10. Ако сл. величина $\xi$ изразява броя на изправните измежду $8^{-те}$ апарата, да се определят закона на разпределение на $\xi$, МО $E_\xi$, дисперсията $D_\xi$, най-вероятната стойност на $\xi$ и $P\{2 \le \xi \le 4\}$.

**Зад. 13.5** В магазин има 3 кашона електрически крушки, като кашоните съдържат съответно:

$I^{-ви}$ кашон: общо 12 крушки, от които 3 с производствен дефект;
$II^{-ри}$ кашон: общо 11 крушки, от които 1 с производствен дефект;
$III^{-ти}$ кашон: общо 15 крушки, от които 2 с производствен дефект.

а) Ако магазинер изпробва по 1 крушка от всеки кашон, да се определят вероятностите сред изпробваните "всички крушки да са дефектни" = $A$ и "да има поне 1 дефектна крушка" = $B$.

б) Ако магазинер изпробва 3 крушки от $II^{-ри}$ кашон, да се определят вероятностите сред изпробваните "да няма дефектни крушки" = $C$ и "да има поне 2 дефектни" = $D$.

в) Ако магазинер е продал 1 крушка от $III^{-ти}$ кашон без да я изпробва, да се определи вероятността случайно избрана крушка от същия кашон да е дефектна.

**Зад. 13.6** Комисия по качеството в завод взема за проверка 8 случайно избрани детайла, произведени от смяна работници. Известно е, че 1/12 от произведените от работниците детайли са некачествени. Ако сл. величина $\xi$ представлява броя на некачествените измежду проверените, да се определят:

а) закона на разпределение на сл. величина $\xi$;

б) вероятността поне 1 от проверените детайли да е некачествен;

в) МО и отклонението на величината $\xi$.





**Зад. 13.7** Ако е известно, че средната месечната заплата в страната е нормално разпределена сл. величина $\xi \in N$ (210, 120). Да се определи вероятността $P\{\xi > 400\}$.

**Зад. 13.8** Три партиди изделия съдържат съответно:

$I^{-ва}$: общо 22 изделия, от които 3 дефектни;
$II^{-ра}$: общо 25 изделия, от които 4 дефектни;
$III^{-та}$: общо 28 изделия, от които 5 дефектни.

а) Ако клиент избира по 1 изделие от всяка партида, да се определят вер. сред избраните - "да няма дефектни" = $A$;
- "да има поне 1 дефектно" = $B$.

б) Ако клиент избира 4 изделия от $I^{-ва}$ партида, да се определят вер. сред избраните - "да няма дефектни" = $C$;
- "да има поне 2 дефектни" = $D$.

**Зад. 13.9** Дневната консумация на електроенергия [милиона $kW/h$] големите градове е непрекъсната сл. величина $\xi$ с плътност:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2-2x & \text{при } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

а) Да се намери функцията на разпределение на сл. величина $\xi$;

б) Да се определи вероятността дневната консумация да е по-малка от 8 [милиона $kW/h$];

в) Да се определи средната стойност на дневната консумация.

**Зад. 13.10** Ръста (в сантиметри) на завършващи 7 клас ученици е нормално разпределена сл. величина $\xi \in N$ (150, 20). Ръководството на баскетболен отбор е решило да потърси нови попълнения за отбора си измежду $30^{-те}$ % най-високи ученици, да се определи какъв е минималния ръст, които трябва да има ученик за да участва в избора.

**Зад. 13.11** Два завода произвеждат живачни термометри. Некачествено произведените термометри с грешка при отчитането по-голяма от допустимото представляват съответно 0,3% и 0,2% от общия брой произвеждани термометри от $I^{-ви}$ и $II^{-ри}$ завод. Болнично отделение закупува общо 12 термометъра, от които 9 са произведени от $I^{-ви}$ и 3 от $II^{-ри}$ завод. Да се определят вероятностите на събитията:

а) "случайно избран термометър измежду 12 в болничното отделение се оказва некачествен" = $A$;

б) "случайно избран термометър да е произведен от $II^{-ри}$ завод", ако се е установило, че той е некачествен.

**Зад. 13.12** Комисия по качеството взема 6 случайно избрани детайла, произведени от смяна работници. Известно е, че 20 от произведените общо 2000 от работниците детайли са некачествени. Ако сл. величина $\xi$ представлява броя на некачествените измежду проверените 6 детайла, да се определят:

а) закона на разпределение на случайната величина $\xi$;

б) вероятността поне 2 от проверените детайли да са некачествени;

в) МО и отклонението на величината $\xi$.

**Зад. 13.13** От лотария са изтеглени 18 билета. Вер. за печалба на всеки от тях е 1/10. Да се определи закона на разпределение и да се пресметнат МО и дисперсията на сл. величина $\xi$, изразяваща броя на изтеглените печеливши билети. Да се определи вер. да бъде изтеглен поне 1 печеливш билет.

**Зад. 13.14** В детска касичка има общо 15 монети, от които:

1 монета – по 1 ст.; 5 монети – по 10 ст.;
4 монети – по 2 ст.; 1 монета – по 20 ст.;
2 монети – по 5 ст.; 2 монети – по 50 ст.

Дете се опитва да извади монета от касичката и нека случайната величина $\xi$ представлява стойността на случайно извадена монета, да се определят:

а) закона на разпределение на случайната величина $\xi$;
б) функцията на разпределение на $\xi$;
в) математическото очакване на величината $\xi$.

***Отговори на общи задачи по вероятности:***

Зад. 13.1 а) 1/4 б) 3/8 в) 1/5
Зад. 13.2 $G(0{,}1)$; $E_\xi = 9$; $D_\xi = 90$; $F_\xi(2) = 0{,}19$
Зад. 13.3 а) 21/620 б) 7/155 в) 7/31
Зад. 13.4 $Bi(8, 7/10)$; $E_\xi = 5{,}6$; $D_\xi = 1{,}68$; $m = 6$; $P\{2 \le \xi \le 4\} = 0{,}19281402$
Зад. 13.5 а) $P(A) = 1/330$; $P(B) = 9/22$ б) $P(C) = 8/11$; $P(D) = 0$ в) 2/15
Зад. 13.6 а) $Bi(8, 1/12)$ б) 0,50147 в) $E_\xi = 2/3$; $\sqrt{D_\xi} = \sqrt{22}/6$
Зад. 13.7 $P\{\xi > 400\} = 0{,}057053437$
Зад. 13.8 а) $P(A) = 1311/2200$; $P(B) = 889/2200$ б) $P(C) = 204/385$; $P(D) = 4/55$
Зад. 13.9 а) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x(2-x), & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ б) 1 в) $E_\xi = 1/3$
Зад. 13.10 минимален ръст - 160,4
Зад. 13.11 а) 11/4000 б) 2/11
Зад. 13.12 а) $HG(2000, 20; 6)$ б) $1-(C_{1980}^{6} + 20.C_{1980}^{5})/C_{2000}^{6}$
в) $E_\xi = 0{,}06$; $\sqrt{D_\xi} = \sqrt{296109/4997500}$
Зад. 13.13 $Bi(18, 1/10)$; $E_\xi = 9/5$; $D_\xi = 81/50$; $P\{\xi \ge 1\} = 1-(9/10)^{18}$
Зад. 13.14 а)

| $\xi = x_k$ | 1 | 2 | 5 | 10 | 20 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\xi = x_k)$ | 1/15 | 4/15 | 2/15 | 5/15 | 1/15 | 2/15 |

б) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 1/15, & 1 < x \le 2 \\ 5/15, & 2 < x \le 5 \\ 7/15, & 5 < x \le 10 \\ 12/15, & 10 < x \le 20 \\ 13/15, & 20 < x \le 50 \\ 1, & x > 50 \end{cases}$

в) $E_\xi = 63/5$





## 14. ВЪВЕДЕНИЕ В СТАТИСТИКАТА

Статистическата наука включва обща статистическа теория и множество предметни теории, като икономическа статистика, банкова статистика, демографска статистика, индустриална статистика и др.

Статистиката е методологическа наука, обект на изучаване на която са масовите явления и процеси и най-общо представлява съвкупност от методи, касаещи събиране, описание, анализ и интерпретация на информация, която може да се представи в числов вид.

Масовите явления и процеси се характеризират с много на брой и различни по тип характеристики, наречени статистически признаци. При дадено статистическо изучаване не се разглеждат всички признаци едновременно, а само част от тях, които за момента представляват интерес. Статистическите признаци биват:

- в зависимост от стойностите, които могат да приемат
  - количествени – дискретни и непрекъснати
  - качествени – нива, категории
- в зависимост от броя на статистическите признаци, които се разглеждат
  - едномерни
  - двумерни
  - многомерни

Засега тук ще бъдат разглеждани само количествени, едномерни статистически признаци.

Етапите при статистическо изучаване на явления и процеси са:

1. Статистическо наблюдение – събиране на статистически данни;
2. Статистическа обработка и представяне на данните;
3. Статистически анализ – получаване на количествени характеристики за изследваните явления и процеси, използване на статистически методи и получаване на изводи.

## 15. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

**Генерална съвкупност (ГС)** – съвкупност от еднородни, еднотипни единици, които са обект на статистическо изследване.
Всяка статистическа единица (напр. отделно лице, събитие, предприятие, животно и др.) има свои особености и качествени характеристики (напр. размер, големина, цвят и др.), които при статистическото изследване се наричат статистически признаци. Статистическите признаци обикновено са много на брой, но при дадено статистическо изучаване се наблюдават само тези, който са значими. Всяка статистическата единица се възприема чрез нейния статистическия признак, който е обект на изследването.

Броя на единиците на ГС се нарича неин обем и се бележи $N$. Често ГС има много голям или дори безкраен обем.

ГС може да се разглежда като случайна величина $X$, имаща някакво разпределение (вж. дяла Вероятности). Тъй като повечето ГС се оказват нормално разпределени, а и статистическите методи, които ще се използват по-нататък са валидни само за нормално разпределени ГС, то считаме, че ГС $X\in N(m, \sigma)$.

**Извадка** – част от единиците на ГС. За Извадката се изисква да удовлетворява редица изисквания, като например:

– елементите (единиците) й да са взети със случаен избор;
– тя да представлява микромодел на ГС.

Броят на единиците на Извадката се нарича неин обем и се бележи $n$.
Колкото по-голям е обема на Извадката, толкова по-точен ще бъде статистическия анализ.

Извадката ще означаваме $X_1, X_2,..., X_n$ и стойностите й могат да се разглеждат като стойности на случайната величина $X$, представляваща ГС.

**Точкова оценка (статистиа)** – всяка стойност $\theta^* = \theta^*(X_1, X_2,..., X_n)$, получена въз основа на направена извадка, която се приема за приближена стойност на неизвестния параметър $\theta$ на разпределението на ГС $X$, се нарича негова точкова оценка.

Точковите оценки на даден параметър $\theta$ на разпределението на ГС е желателно да бъдат:

– неизместени (н.о.) : $E\theta^* = \theta$;
– състоятелни (с.о.) : $\theta^* \xrightarrow{P} \theta$;
– неизместени оценки с минимална дисперсия.

**Интервална оценка** – всеки числов интервал $(\theta_1^*, \theta_2^*)$, краищата на който $\theta_i^* = \theta_i^*(X_1, X_2,..., X_n)$ са получени въз основа на направена извадка $X_1, X_2,..., X_n$ и за който се твърди, че съдържа неизвестния параметър $\theta$ на разпределението на ГС $X$, се нарича интервална оценка за $\theta$.





## 16. СТАТИСТИЧЕСКА ОБРАБОТКА И ПРЕДСТАВЯНЕ НА ИЗВАДКА

В резултат от статистическото наблюдение се получава огромно количество от стат. данни, които характеризират стат. единици на съвкупността по определени признаци. За извършването на статистическия анализ понякога е необходимо предварителната обработка на данните от извадката.
Съвкупността от данни, представляващи стойностите в извадката в реда на тяхното получаване, ще наричаме **негрупирани данни**.

Нека стойностите на извадката са $X_1, X_2, ... , X_n$. Ако тези стойности се наредят във възходящ ред $X_{i_1} \le X_{i_2} \le ... \le X_{i_n}$ се получава **вариационен ред**.

Разликата между най-голямата и най-малката стойности на наблюденията в извадката: $R = X_{\max} - X_{\min}$ се нарича **размах** на извадката.

В случаите, когато в извадката има повтарящи се стойности, е удобно представянето на наблюденията да става чрез **честоти**:

| наблюдения $X_i$ | $X_1$ | $X_2$ | … | $X_k$ |
|---|---|---|---|---|
| абсолютни честоти $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_k$ |

Тогава обемът на извадката е: $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

В някои случаи, когато обема на извадката $n$ и броя $k$ на различните стойности в извадката са големи, се използва представяне чрез честоти на наблюденията в интервали. Такива данни се наричат **групирани**:

| интервали $(a_{i-1}, a_i]$ | $(a_{i-1}, a_i]$ | $(a_{i-1}, a_i]$ | … | $(a_{i-1}, a_i]$ |
|---|---|---|---|---|
| абсолютни честоти $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_k$ |

$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

**Относителните честоти** се определят от

$$n_i^{\text{отн.}} = \frac{n_i}{n},\ i=\overline{1,k}, \text{ като } \sum_{i=1}^{k} n_i^{\text{отн.}} = \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i = \frac{1}{n}.n = 1.$$

**Кумулираните (натрупани) честоти** се определят по формулите:

$k_i = \sum_{j:j\le i} n_j$ – за кумулирани абсолютни честоти и $k_i^{\text{отн.}} = \sum_{j:j\le i} n_j^{\text{отн.}} = \sum_{j:j\le i} \frac{n_j}{n}$ – за кумулирани относителни честоти.

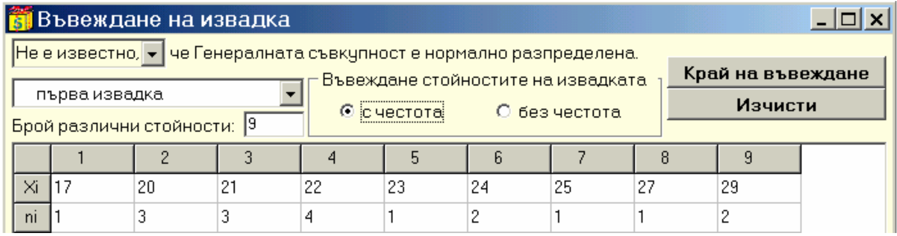
Съответствието между наблюденията и техните честоти се нарича **статистическо (честотно) разпределение**.

**Пример 16.1** За извадката със стойности в реда на тяхното получаване: 21, 22, 20, 27, 29, 22, 21, 20, 29, 24, 22, 21, 23, 22, 24, 25, 17, 20 да се запишат вариационния ред и честотното разпределение на некумулираните и кумулираните, абсолютни и относителни честоти.
*Решение*: Вариационния ред е: $17\le20\le20\le20\le21\le21\le21\le22\le22\le22\le22\le23\le24\le24\le25\le27\le29\le29$. Честотното разпределение е:

| наблюдения $X_i$ | 17 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 27 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| абсолютни честоти $n_i$ | 1 | 3 | 3 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| кум. абс. честоти $k_i$ | 1 | 4 | 7 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 18 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| относителни честоти $n_i^{\text{отн.}}$ | 1/18 | 3/18 | 3/18 | 4/18 | 1/18 | 2/18 | 1/18 | 1/18 | 2/18 |
| кум. отн. честоти $k_i^{\text{отн.}}$ | 1/18 | 4/18 | 7/18 | 11/18 | 12/18 | 14/18 | 15/18 | 16/18 | 18/18 |

В програмата GiftStat въвеждането на извадката изглежда така:




**Често използвани графични представяния:**

**<u>Хистограма</u>** – графично представяне в двумерна координатна система на честотното разпределение на извадка чрез запълнени многоъгълници, едната страна на които е интервал от честотното разпределение, а другата страна е честотата на наблюдения, попадащи в този интервал.

**<u>Полигон</u>** – графично представяне представяне в двумерна координатна система на честотното разпределение на извадка чрез начупена крива, свързваща точките с абсциси – средите на интервалите и ординати – честотите на наблюденията, попадащи в съответните интервали.

Честотите (при хистограма и полигон) могат да бъдат некумулирани и кумулирани, абсолютни и относителни.

<u>Забележки</u>:

- Когато извадката не е дадена с честотно разпределение в интервали, а със конкретните стойности на всяко наблюдение, за построяването на хистограма и полигон е необходимо първо да бъде уточнен броя на интервалите. От използвания брой интервали до голяма степен зависи вида на получената хистограма или полигон. (Уверете се чрез програмата GiftStat като за извадката от Пример 16.1 последователно увеличавате броя на интервалите от 3 до 15. При голям брой на интервалите ще се появят интервали, в който не са наблюдавани стойности.).
- Често при стат. изследвания хистограмата на некумулираните относителни честоти се сравнява с плътността на нормалното разпределение за да се провери предположението за нормалност на ГС.

**Пример 16.2** Стойностите на извадката от Пример 16.1 да се групират в 4 интервала с дължина 4 и начало на първия интервал 15. Да се построят хистограмите и полигоните на абсолютни некумулирани честоти и на относителни кумулирани честоти.

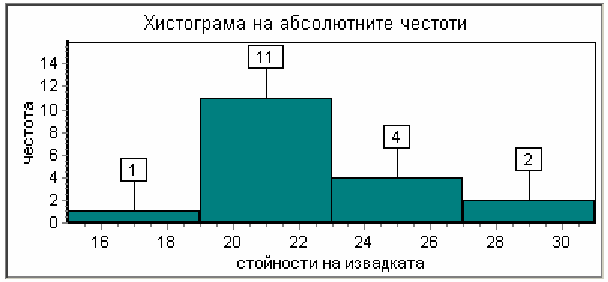
*Решение*:

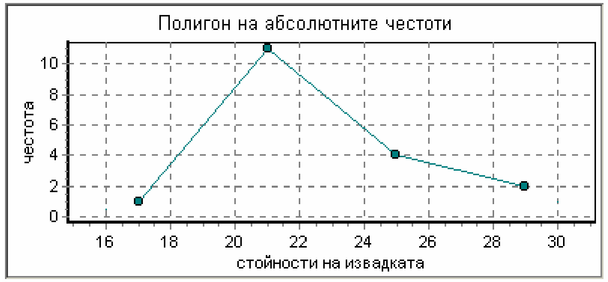
| интервали $(a_{i-1}, a_i]$ | (15, 19] | (19, 23] | (23, 27] | (27, 31] |
|---|---|---|---|---|
| абсолютни честоти $n_i$ | 1 | 11 | 4 | 2 |
| кум. абс. честоти $k_i$ | 1 | 12 | 16 | 18 |
| кум. отн. честоти $k_i^{\text{отн.}}$ | $1/18 \approx 0{,}056$ | $12/18 \approx 0{,}667$ | $16/18 \approx 0{,}889$ | $18/18 = 1$ |



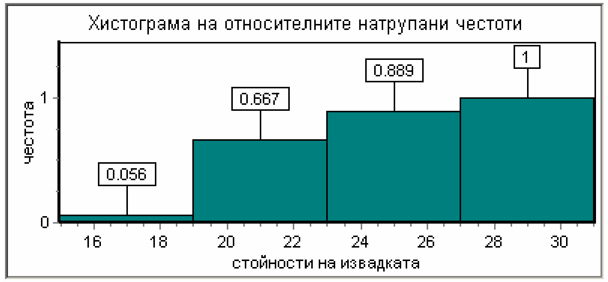


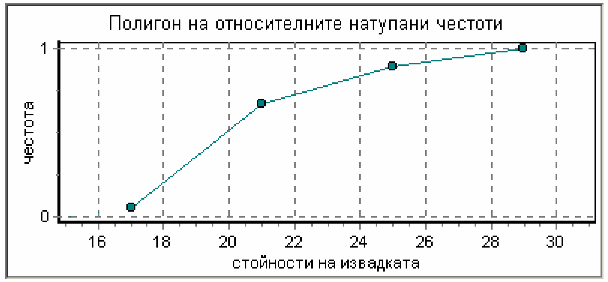
- за абсолютни некумулирани честоти:




- за относителни кумулирани честоти:




**<u>ЗАДАЧИ</u>**:

**Зад. 16.1** За извадката със стойности в реда на тяхното получаване: 11, 15, 20, 18, 12, 18, 16, 15, 12, 18, 15, 13, 16, 20, 13 да се определят вариационния ред, честотното разпределение на некумулираните и кумулираните абсолютни и относителни честоти и размаха *R*.

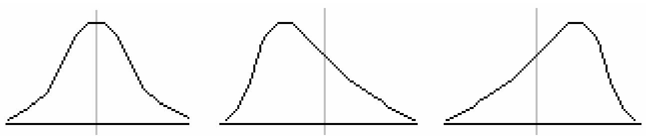
## 17. ОСНОВНИ ЧИСЛОВИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ГС И ИЗВАДКА

Нека имаме нормално разпределена ГС $X \in N\,(m,\ \sigma)$. И нека от ГС $X$ е направена извадката $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

| ГС $X \in N\,(m, \sigma)$ | извадка $X_1, X_2, \ldots, X_n$ | коментар |
|---|---|---|
| МО (средна стойност)<br>$EX = m$ | извадково средно<br>$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ | $\overline{X}$ – (н. о.) и (с. о.) на $EX$ |
| дисперсия<br>$DX = \sigma^2$ | непоправена извадкова дисперсия<br>$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$<br>поправена извадкова дисперсия<br>$S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ | $S^2$ – (с. о.) на $DX$<br>$S_{n-1}^2$ – (н. о.) и (с. о.) на $DX$ |
| стандартно отклонение<br>$\sqrt{DX} = \sigma$ | извадково стандартно отклонение (поправено)<br>$S = \sqrt{S_{n-1}^2}$ | $S$ – (н. о.) и (с. о.) на $\sqrt{DX}$ |

Забележка: Извадковото средно $\overline{X}$ и извадковото отклонение $S$ могат да се получат наготово за въведена извадка в режим STAT на калкулаторите с математически функции.

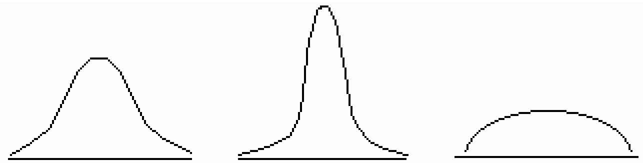
| ГС $X \in N\,(m, \sigma)$ | извадка $X_1, X_2, \ldots, X_n$ | коментар |
|---|---|---|
| коефициент на асиметрия<br>$E(X - EX)^3/\sigma^3$ | извадков коефициент на асиметрия<br>$A = \frac{1}{nS^3}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^3$ | Дава представа за симетричността на разпределението (виж по-долу). |
| ексцес (островърхост или тежест на опашките)<br>$E(X - EX)^4/\sigma^4 - 3$ | извадков ексцес<br>$E = \frac{1}{nS^4}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^4 - 3$ | Дава представа за островърхостта на разпределението и за тежестта на опашките (виж по-долу). |



$A = 0$ симетрично  $A > 0$ дясно асиметрично  $A < 0$ ляво асиметрично







$E = 0$  $E > 0$  $E < 0$

Забележки:

- Нормалното разпределение е симетрично, т.е. коефициента на асиметрия на нормалното разпределение е 0. Ексцеса на нормалното разпределение също е 0.
- Когато извадката е дадена с честотно разпределение в интервали $(a_{i-1}, a_i]$ (групирани данни), за заместване на стойностите на наблюденията $X_i$ в горните формули се използват средите на интервалите $\frac{a_{i-1} + a_i}{2}$.

Някои други често използвани числови характеристики за извадката са:

**Вариацията на размаха** $V_R = \frac{R}{\overline{X}} = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{\overline{X}}.100$ се изразява в % и представлява мярка за разсейването на стойностите в извадката.

**Вариацията на станд. отклонение (Коефициент на вариация)** $V_S = \frac{S}{\overline{X}}.100$ също се изразява в %.

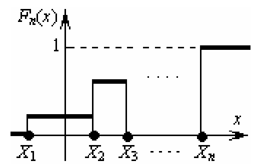
**Медианата** ($Md$) разделя извадката на 2 подмножества с равен брой наблюдения, т.е. половината от наблюденията по стойност са по-малки от $Md$, а другата половина са по-големи.

**Модата** ($Mo$) представлява максимума на честотното разпределение.

Забележка: Когато извадката е дадена с конкретните стойности на наблюденията, определянето на $Md$ и $Mo$ не представлява трудност. В случаите, когато извадката е дадена чрез честотно разпределение в интервали (групирани данни), за определянето на $Md$ и $Mo$ се определят съответно медианния и модалния интервал и се използват готови формули.

**Емперичната функция на разпределение $F_n(x)$** е функция, определяща за $\forall$ реално число $x$ отн. честота на кумулирания брой наблюдения $k_i^{\text{отн.}}$, за който наблюдаваната стойност е по-малка от $x$. Т.е. ако $X_1 \le X_2 \le \ldots \le X_n$ е вариационния ред на извадката, то

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le X_1 \\ k_i^{\text{отн.}}, & X_i < x \le X_{i+1}, \quad (i = \overline{1, n-1}) \\ 1, & X_n < x \end{cases}$$




Забележка: Графиката на емперичната функция на разпределение наподобява хистограмата на относителните кумулирани честоти.

**Пример 17.1** Да се определят всички споменати по-горе числови характеристики за извадката:

| наблюдения $X_i$ | 8 | 12 | 16 | 19 |
|---|---|---|---|---|
| абсолютни честоти $n_i$ | 2 | 3 | 4 | 1 |

*Решение*:

$$\overline{X} = \frac{1}{10}(2.8 + 3.12 + 4.16 + 1.19) = 13{,}5$$

$$S_{n-1}^2 = \frac{1}{9}\left[2.(8-13{,}5)^2 + 3.(12-13{,}5)^2 + 4.(16-13{,}5)^2 + 1.(19-13{,}5)^2\right] = 13{,}6111$$

$$S = \sqrt{13{,}6111} = 3{,}6893$$

$$A = \frac{1}{10.50{,}2158}\left[2.(8-13{,}5)^3 + 3.(12-13{,}5)^3 + 4.(16-13{,}5)^3 + 1.(19-13{,}5)^3\right] =$$
$$= -0{,}227$$

$$E = \frac{1}{10.185{,}2623}\left[2.(8-13{,}5)^4 + 3.(12-13{,}5)^4 + 4.(16-13{,}5)^4 + 1.(19-13{,}5)^4\right] - 3 =$$
$$= -1{,}4257$$

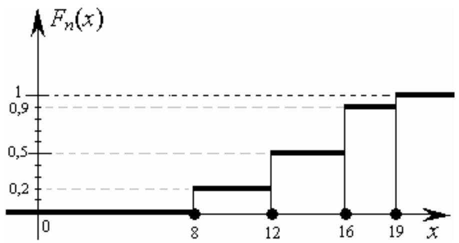
$$V_R = \frac{19-8}{13{,}5}.100\,\% = 81{,}5\,\% \qquad V_S = \frac{3{,}6893}{13{,}5}.100\,\% = 27{,}3\,\%$$

$n = 10$ – четен брой $\Rightarrow$ $Md$ е средно-аритметичното на стойностите на 5$^{\text{-тото}}$ и 6$^{\text{-тото}}$ по големина от наблюденията във вариационния ред на извадката. Т.е.

$$Md = \frac{12+16}{2} = 14\,.$$

Най-често срещаната стойност е 16. Т.е. $Mo = 16$.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 8 \\ 2/10, & 8 < x \le 12 \\ 5/10, & 12 < x \le 16 \\ 9/10, & 16 < x \le 19 \\ 1, & 19 < x \end{cases}$$




## ЗАДАЧИ

**Зад. 17.1** Да се определят всички разгледани числови характеристики за извадката:

| наблюдения $X_i$ | 14 | 18 | 21 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| абсолютни честоти $n_i$ | 3 | 4 | 5 | 1 |

*Отг.* $\overline{X} = 18{,}7692$; $S_{n-1}^2 = 11{,}1923$; $S = 3{,}3455$; $A = -0{,}0613$; $E = -1{,}0445$; $Md = 18$; $Mo = 21$.





## 18. ИЗВАДКОВИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

Величини (статистики), получени на базата на извадка от ГС с определено разпределение, от своя страна също имат някакво определено разпределение. Някои от тези теоретично доказани факти ще бъдат изброени тук за да може да бъдат използвани в темите ДОВЕРИТЕЛНИ ИНТЕРВАЛИ и ПРОВЕРКА НА ХИПОТЕЗИ.

Нека от ГС $X \in N(m, \sigma)$ е направена извадката $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с обем $n$, като $\overline{X}$, $S_{n-1}^2$ и $S$ са съответно извадковото средно, извадковата поправена дисперсия и извадковото отклонение (стр. 50). Тогава:

[10] $$\overline{X} \in N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

[11] $$\frac{\overline{X}-m}{\sigma}.\sqrt{n} \in N(0,1)$$

[12] $$\frac{\overline{X}-m}{S}.\sqrt{n} \in t(n-1)$$

[13] $$\frac{(n-1).S_{n-1}^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n-1)$$

Забележки:

- [11] следва от [10] и от Т-мата на стр. 40.
- $t(n-1)$ е означението на $t$-разпределението на Стюдънт. В скобите се означават степените на свобода – параметър, от който зависи това разпределение. При степени на свобода ≥ 30 се счита, че $t$-разпределението се апроксимира от нормалното разпределение. $t$-разпределението, също както и нормалното, е симетрично. За определяне на негови квантили използвайте таблицата в ПРИЛОЖЕНИЕ 2.
- $\chi^2(n-1)$ е означението на $\chi^2$-разпределението на Пирсън. Както и при $t$-разпределението в скобите се означават степените на свобода – параметър, от който зависи това разпределение. $\chi^2$-разпределението не е симетрично. За определяне на негови квантили използвайте таблицата в ПРИЛОЖЕНИЕ 3.
- По-нататък ще бъде използвано още едно разпределение – $F$-разпределението на Фишер $F(k_1, k_2)$. Както се вижда от означението, това разпределение зависи от 2 параметъра, т.е. има 2 параметъра за степени на свобода. Квантили на това разпределение при стойности на $q = 0{,}75$; $0{,}90$; $0{,}95$; $0{,}975$ и $0{,}99$ са дадени в таблиците на ПРИЛОЖЕНИЕ 4.
- За разлика от ПРИЛОЖЕНИЕ 2, ПРИЛОЖЕНИЕ 3 и ПРИЛОЖЕНИЕ 4, където в таблиците са дадени съответно стойностите на квантилите на $t$-разпределението на Стюдънт, $\chi^2$-разпределението на Пирсън и $F$-разпределението на Фишер, в ПРИЛОЖЕНИЕ 1 са дадени стойностите на функцията на разпределение на Стандартното нормално разпределение $N(0, 1)$. За определяне на квантилите на $N(0, 1)$ в ПРИЛОЖЕНИЕ 1 се търси в таблицата стойността на $q = \Phi(z)$ и се определя съответният квантил $z$.

# 19. ДОВЕРИТЕЛНИ ИНТЕРВАЛИ

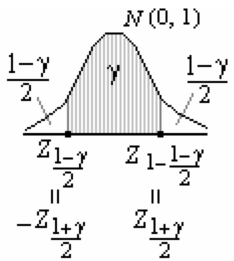
## Доверителни интервали с доверителна вероятност $\gamma$ за параметрите на нормално разпределена ГС $X \in N\,(m,\ \sigma)$

Нека от ГС $X \in N\,(m,\ \sigma)$ е направена извадката $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с обем $n$, като $\overline{X}$, $S_{n-1}^2$ и $S$ са съответно извадковото средно, извадковата поправена дисперсия и извадковото отклонение (стр. 50).

| параметър | доверителен интервал | квантили | разпр. |
|---|---|---|---|
| МО $m$ | - дисп. $\sigma^2$ – известна : $\left(\overline{X} - Z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + Z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ | $Z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ | $N\,(0,\,1)$ |
| | - дисп. $\sigma^2$ – неизвестна : $\left(\overline{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$ | $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ | $t(n\!-\!1)$ |
| дисперсия $\sigma^2$ | $\left(\frac{(n-1)\,S_{n-1}^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}}; \frac{(n-1)\,S_{n-1}^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right)$ | $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}$ $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}$ | $\chi^2(n\!-\!1)$ |
| стандартно отклонение $\sigma$ | $\left(\frac{\sqrt{n-1}\;\,S}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}}}; \frac{\sqrt{n-1}\;\,S}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}}}\right)$ | $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}$ $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}$ | $\chi^2(n\!-\!1)$ |

Получаване:

**- доверителен интервал за МО $m$ при $\sigma^2$ – известна**




От [11] $\quad \dfrac{\overline{X} - m}{\sigma}.\sqrt{n} \in N\,(0,1) \qquad \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ P\{-Z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\overline{X} - m}{\sigma}.\sqrt{n} < Z_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = \gamma \ \Leftrightarrow$$

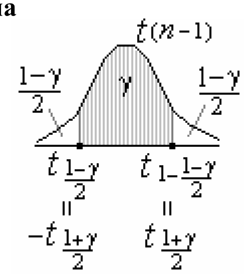
$$\Leftrightarrow P\{\overline{X} - Z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + Z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\} = \gamma$$

Т.е. търсеният доверителен интервал е $\left(\overline{X} - Z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + Z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.



Упражнения по Вероятности и Статистика – Таня Янкова

**- доверителен интервал за МО $m$ при $\sigma^2$ – неизвестна**



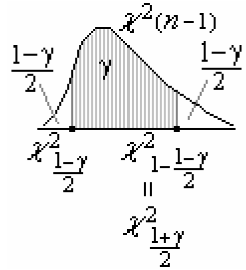

От [12] $\quad \dfrac{\overline{X} - m}{S}.\sqrt{n} \in t\,(n-1) \qquad \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ P\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\overline{X} - m}{S}.\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = \gamma \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ P\{\overline{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\} = \gamma$$

Т.е. търсеният доверителен интервал е $\left(\overline{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$.

**- доверителен интервал за дисперсия $\sigma^2$**




От [13] $\quad \dfrac{(n-1).S_{n-1}^2}{\sigma^2} \in \chi^2\,(n-1) \qquad \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ P\{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{(n-1).S_{n-1}^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = \gamma \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ P\{\frac{(n-1).S_{n-1}^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1).S_{n-1}^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}}\} = \gamma$$

Т.е. търсеният доверителен интервал е $\left(\frac{(n-1)\,S_{n-1}^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}}; \frac{(n-1)\,S_{n-1}^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right)$.

**- доверителен интервал за стандартно отклонение $\sigma$**

Получава се от формулата за доверителен интервал за дисперсия $\sigma^2$ чрез кореннуване двата края на интервала: $\left(\frac{\sqrt{n-1}\;\,S}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}}}; \frac{\sqrt{n-1}\;\,S}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}}}\right)$, като $S = \sqrt{S_{n-1}^2}$ .

**Пример 19.1** Изследва се износването на грайфера (в мм.) на модел автомобилни гуми при пробег 70 000 км. от върху асфалт, при което предварително е известно, че разпределението на това износване е нормално. Направени са измервания на една от гумите на 10 различни автомобила. Резултатите са: 6,5; 7,2; 7,6; 6,8; 7,0; 7,9; 6,6; 6,1; 6,5; 7,0.

а) Ако дисперсията в износването е 0,49, да се определи доверителния интервал за средното износване с доверителна вероятност 0,95.

б) Да се определи доверителния интервал за средното износване с доверителна вероятност 0,90.

в) Да се определи доверителния интервал за дисперсията в износването с доверителна вероятност 0,98.

*Решение*: Обемът на направената извадка е $n = 10$. Ако приемем да закръгляме до 4$^{\text{ти}}$ знак след десетичната запетая, за числовите характеристики на извадката се получава:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{10}(6{,}5+7{,}2+\ldots+7) = 6{,}92\,;$$

$$S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{9}\left[(6{,}5-6{,}92)^2 + (7{,}2-6{,}92)^2 + \ldots + (7-6{,}92)^2\right] = 0{,}2951\,;$$

$$S = \sqrt{S_{n-1}^2} = \sqrt{0{,}2951} = 0{,}5432\,.$$

а) Търсеният доверителен интервал е за МО (средна стойност) при известна дисперсия $\sigma^2$ = 0,49. Тогава във формулата $\left(\overline{X} - Z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\overline{X} + Z_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ще заместим $\sigma$ = 0,7 и при доверителна вероятност $\gamma$ = 0,95 от ПРИЛОЖЕНИЕ 1 определяме квантила $Z_{\frac{1+\gamma}{2}} = Z_{\frac{1+0{,}95}{2}} = Z_{0{,}975} = 1{,}96$. За доверителният интервал се получава $\left(6{,}92 - 1{,}96\frac{0{,}7}{\sqrt{10}}\,; 6{,}92 + 1{,}96\frac{0{,}7}{\sqrt{10}}\right)$, т.е. ( 6,4861 ; 7,3539 ).

Чрез програмата GiftStat резултатът за доверителния интервал изглежда по следния начин:






б) Търсеният доверителен интервал е за МО (средна стойност) при неизвестна дисперсия. Тогава използваме формулата $\left(\overline{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\,;\overline{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$, като при доверителна вероятност $\gamma$ = 0,90 от ПРИЛОЖЕНИЕ 2 определяме квантила $t_{\frac{1+\gamma}{2}} = t_{\frac{1+0{,}90}{2}} = t_{0{,}95} = 1{,}8331$ на $t(9)$. За доверителният интервал се получава

$\left(6{,}92 - 1{,}8331\frac{0{,}5432}{\sqrt{10}}\,; 6{,}92 + 1{,}8331\frac{0{,}5432}{\sqrt{10}}\right)$, т.е. ( 6,6051 ; 7,2349 ).

в) Търсеният доверителен интервал е за дисперсия. Тогава използваме $\left(\frac{(n-1)\,S_{n-1}^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}}\,;\frac{(n-1)\,S_{n-1}^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right)$, като при доверителна вероятност $\gamma$ = 0,98 от ПРИЛОЖЕНИЕ 3 определяме двата квантила на $\chi^2(9)$ разпределението:

$\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}} = \chi^2_{\frac{1-0{,}98}{2}} = \chi^2_{0{,}01} = 2{,}0879$ и $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}} = \chi^2_{\frac{1+0{,}98}{2}} = \chi^2_{0{,}99} = 21{,}6660\,.$

За дов. интервал се получава $\left(\frac{9.\,0{,}2951}{21{,}6660}\,;\frac{9.\,0{,}2951}{2{,}0879}\right)$, т.е. ( 0,1226 ; 1,2721 ).

**ЗАДАЧИ**:

**Зад. 19.1** Клиент поръчва на шивашка фирма е ушиването на партида панталони. Известно е, че дължините на ушитите панталони са нормално разпределени. Направени са измервания на 9 случайно избрани панталона от партидата, при което резултатите (в см.) са:

| стойности $X_i$ | 103 | 104 | 105 | 107 | 108 |
|---|---|---|---|---|---|
| честота $n_i$ | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |

а) Да се намери доверителен интервал за средната дължина на ушитите панталони с доверителна вероятност $\gamma$ = 0,98;

б) Да се намери доверителен интервал за отклонението в дължините на партидата ушити панталони с доверителна вероятност $\gamma$ = 0,95.

*Отг.* а) ( 103,5655 ; 106,8790 ) б) ( 1,1590 ; 3,2874 )

**Зад. 19.2** Чрез оценяването на случайно избрани изделия от партида по няколко контролни показателя, комисия установява качеството партидата. Получените от комисията оценки за 8 изделия са: 5,30; 4,85; 4,80; 6,00; 5,95; 4,60; 5,30; 4,40. Известно е, че оценките са нормално разпределени.

а) Да се намери доверителен интервал за средната оценка с доверителна вероятност $\gamma$= 0,90, ако отклонението в оценяването е 1,3.

б) да се намери доверителен интервал за дисперсията с доверителна вероятност $\gamma$= 0,99;

*Отг.* а) ( 4,3916 ; 5,9084 ) б) ( 0,1225 ; 1,2492 )

# 20. ПРОВЕРКА НА ХИПОТЕЗИ

Хипотезата в статистиката е предположение за някои свойства на изучавана ГС. Това предположение се озн. с $H_0$ и се нарича **основна (нулева) хипотеза**. Противоположното предположение на $H_0$ се означава с $H_1$ и се нарича **алтернативна (контра) хипотеза**. Имаме:

$H_0$: основна хипотеза $\qquad$ $H_1$: алтернативна хипотеза

При статистическата проверка на дадена хипотеза $H_0$, тя може да бъде приета за вярна или да бъде отхвърлена като грешна. Четирите възможни варианта и означенията за техните вероятности са дадени в таблицата:

| приема се за вярна \ вярна | $H_0$ | $H_1$ |
|---|---|---|
| $H_0$ | $1-\alpha$ | $\beta$ |
| $H_1$ | $\alpha$ | $1-\beta$ |

Т.е. $\alpha, \beta$ са вероятности за възможни грешки.

$P$ (приема се за вярна $H_1$ \ вярна е $H_0$) = $\alpha$ се нарича вероятност за **грешка от I^ви^ род** или **ниво на значимост**;

$P$ (приема се за вярна $H_0$ \ вярна е $H_1$) = $\beta$ се нарича вероятност за **грешка от II^ри^ род**;

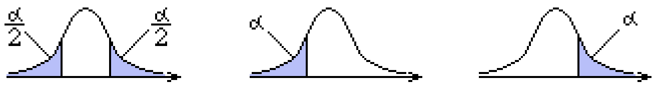
$P$ (приема се за вярна $H_1$ \ вярна е $H_1$) = $1-\beta$ се нарича **мощност на статистическия критерий**;

Решението за приемане или отхвърляне на основната хипотеза се основава на **статистически критерий**. Статистическият критерий определя кои са областите от стойности на наблюденията в извадката, който противоречат на основната хипотеза $H_0$, т.е кои са **критичните области** за $H_0$. Трябва да се има предвид, че статистическия критерий не може да докаже верността на $H_0$, а може само да установи наличието или липсата на противоречие с направеното предположение, представляващо хипотезата $H_0$. Затова възможните резултати от проверката на дадена хипотеза $H_0$ са:

– "$H_0$ *се отхвърля*" и
– "*Няма основание за отхвърляне на* $H_0$".

Тъй като е невъзможно да се намери статистически критерий, който едновременно да минимизира $\alpha$ и $\beta$ (при намаляване на $\alpha$, то $\beta$ расте и обратно), се определя достатъчно малко ниво на значимост $\alpha$. При това фиксирано $\alpha$ статистическия критерий се определя така, че $\beta$ да е минимално.

Критичната област за $H_0$ се строи с обща площ $\alpha$. В зависимост от вида на двойката хипотези $H_0$ и $H_1$, критичната област за $H_0$ може да бъде:



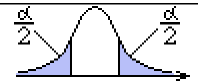
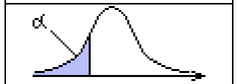
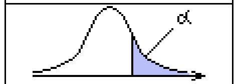
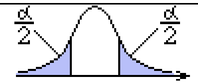
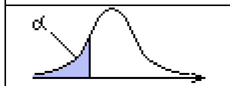
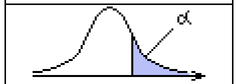

двустранна $\qquad$ лява $\qquad$ дясна





**Проверка на хипотези с ниво на значимост $\alpha$ за сравняване с число на параметрите на нормално разпределена ГС $X \in N(m, \sigma)$**

Нека от ГС $X \in N(m, \sigma)$ е направена извадката $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с обем $n$, като $\overline{X}$, $S^2_{n-1}$ и $S$ са съответно извадковото средно, извадковата поправена дисперсия и извадковото отклонение (стр. 50).

| $H_0$ | $H_1$ | наблюдавана стойност | критична област; $H_0$ се отхвърля, ако: | разпр. |
|---|---|---|---|---|
| $H_0: m = m_0$ | $H_1: m \neq m_0$ | а) дисп. $\sigma^2$ – известна: $Z_{\text{набл.}} = \dfrac{\overline{X}-m_0}{\sigma}\sqrt{n}$ |  а) $\lvert Z_{\text{набл.}}\rvert > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ б) $\lvert t_{\text{набл.}}\rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ | а) $N(0,1)$ |
| | $H_1: m < m_0$ | |  а) $Z_{\text{набл.}} < -Z_{1-\alpha}$ б) $t_{\text{набл.}} < -t_{1-\alpha}$ | |
| | $H_1: m > m_0$ | б) дисп. $\sigma^2$ – неизвестна: $t_{\text{набл.}} = \dfrac{\overline{X}-m_0}{S}\sqrt{n}$ |  а) $Z_{\text{набл.}} > Z_{1-\alpha}$ б) $t_{\text{набл.}} > t_{1-\alpha}$ | б) $t(n-1)$ |
| $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_0: \sigma = \sigma_0$ | $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma \neq \sigma_0$ | $\chi^2_{\text{набл.}} = \dfrac{(n-1)\,S^2_{n-1}}{\sigma_0^2}$ |  $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ или $\chi^2_{\text{набл.}} > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ | $\chi^2(n-1)$ |
| | $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ $H_1: \sigma < \sigma_0$ | |  $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\alpha}$ | |
| | $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ $H_1: \sigma > \sigma_0$ | |  $\chi^2_{\text{набл.}} > \chi^2_{1-\alpha}$ | |

**Пример 20.1** Бутилираща машина пълни шишета със сок. Известно е, че обема на съдържанието на бутилките е нормално разпределен. При направена проверка е измерено съдържанието на 16 шишета, при което $\overline{X} = 0{,}93$ и извадково поправено отклонение $S = 0{,}04$.

а) Ако отклоненията в обема при бутилиране са $\sigma = 0{,}03$ да се провери с ниво на значимост $\alpha = 0{,}05$ дали машината бутилира шишета със съдържание на сок точно 1 литър.

б) Да се провери с ниво на значимост $\alpha = 0{,}01$ хипотезата, че машината бутилира шишета с по-малко съдържание на сок от 1 литър.

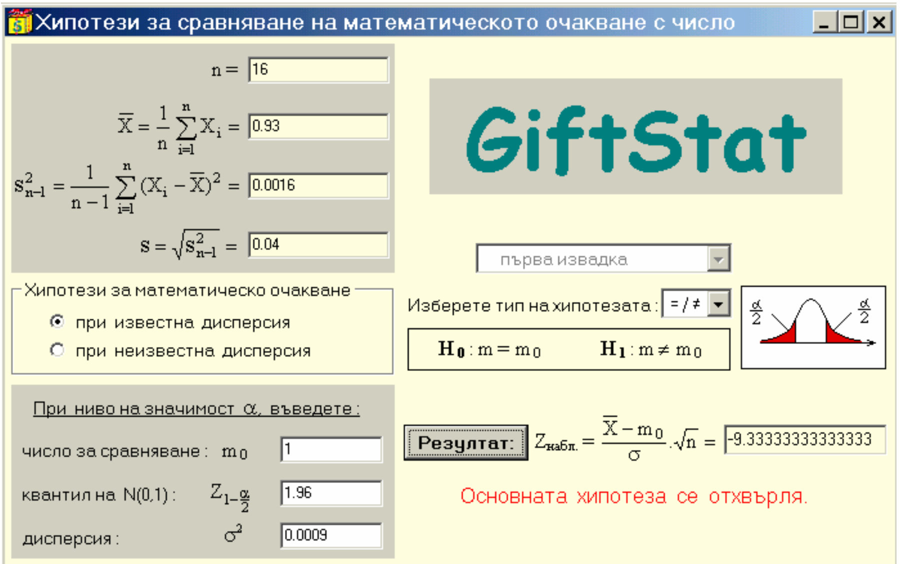
в) Ако максимално допустимото отклонение в обема на съдържанието на едно шише е 0,05 литра, да се провери с ниво на значимост $\alpha = 0{,}025$ дали машината пакетира с необходимата точност.

*Решение*:

а) $H_0$: $m = 1$ литър  $H_1$: $m \neq 1$ литър  ($m_0 = 1$ литър)

По условие $\sigma = 0{,}03$ $\Rightarrow$ имаме случая, когато дисп. $\sigma^2$ – известна. Тогава $Z_{\text{набл.}} = \dfrac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} = \dfrac{0{,}93-1}{0{,}03}\sqrt{16} = -9{,}3333$. От ПРИЛОЖЕНИЕ 1 при $\alpha = 0{,}05$ трябва да определим квантила $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ на $N(0,\ 1)$: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}975} = 1{,}96$.

Сравняваме $|Z_{\text{набл.}}| = 9{,}3333 > Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$ $\Rightarrow$ $H_0$ се отхвърля, т.е. машината не бутилира шишета със съдържание точно 1 литър.




б) Тъй като основната хипотеза $H_0$ трябва да бъде винаги от тип " = ", то хипотезата $m < 1$, която трябва да се провери, съгласно условието на задачата, ще бъде алтернативната $H_1$. Т.е.:





$H_0$: $m = 1$ литър  $H_1$: $m < 1$ литър  ($m_0 = 1$ литър)

Сега $\sigma^2$ е неизвестна и тогава се пресмята $t_{\text{набл.}} = \dfrac{\overline{X} - m_0}{S}\sqrt{n} = \dfrac{0{,}93-1}{0{,}04}\sqrt{16} = -7$.

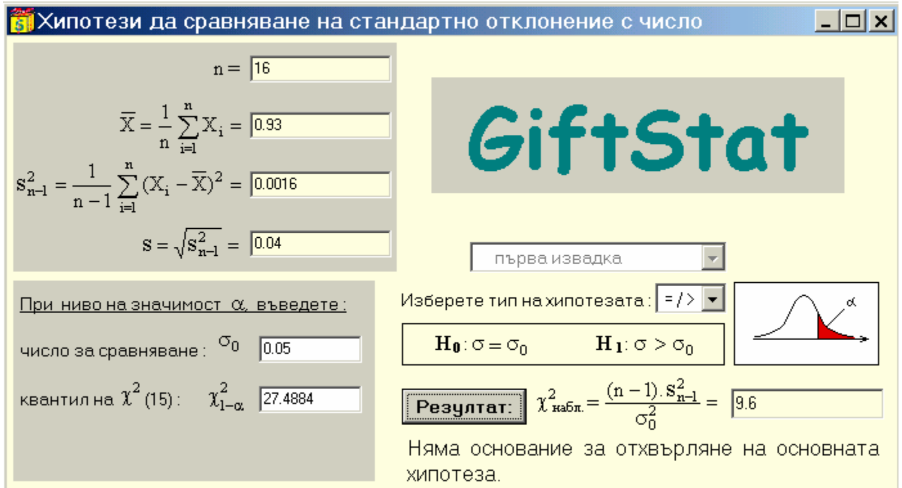
От ПРИЛОЖЕНИЕ 2 при $\alpha = 0{,}01$ трябва да определим квантила $-t_{1-\alpha}$ на $t(15)$: $-t_{1-\alpha} = -t_{1-0{,}01} = -t_{0{,}99} = 2{,}6025$. Сравняваме $t_{\text{набл.}} = -7 < -t_{1-\alpha} = -2{,}6025$ $\Rightarrow$ $H_0$ се отхвърля и за вярна се приема хипотезата $H_1$, т.е. машината бутилира шишета със по-малко съдържание от 1 литър.

в) За да се провери дали машината пакетира с необходимата точност, трябва да се провери дали отклонението $\sigma \leq 0{,}05$ срещу алтернативата $\sigma > 0{,}05$. Тъй като основната хипотеза $H_0$ трябва да бъде винаги от тип " = ", то хипотезите ще бъдат:

$H_0$: $\sigma = 0{,}05$  $H_1$: $\sigma > 0{,}05$  ($\sigma_0 = 0{,}05$)

Пресмята се $\chi^2_{\text{набл.}} = \dfrac{(n-1)\,S^2_{n-1}}{\sigma_0^2} = \dfrac{15\,.0{,}0016}{0{,}0025} = 9{,}6$. От ПРИЛОЖЕНИЕ 3 при $\alpha = 0{,}025$ трябва да определим $\chi^2_{1-\alpha}$ на $\chi^2(15)$: $\chi^2_{1-\alpha} = \chi^2_{1-0{,}025} = \chi^2_{0{,}975} = 27{,}4884$.

Сравняваме $\chi^2_{\text{набл.}} = 9{,}6 < \chi^2_{1-\alpha} = 27{,}4884$ $\Rightarrow$ няма основание за отхвърлянето на $H_0$ и може да се счита, че машината пакетира с необходимата точност.




## ЗАДАЧИ

**Зад.20.1** Съюза на потребителите измерва калоричността ($kcal$ \100$g$) в кравето кисело мляко в търговската мрежа. Направената извадка е:

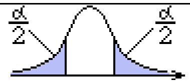
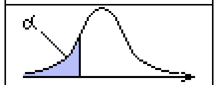
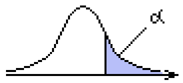
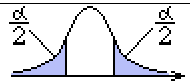
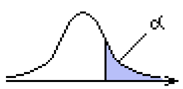
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| стойности $X_i$ | 24 | 30 | 46 | 52 | 61 |
| честота $n_i$ | 2 | 3 | 6 | 4 | 1 |

Ако е известно, че калоричността на кравето мляко е нормално разпределена величина, да се провери дали средната калоричност надвишава 30 $kcal$ \100$g$ с ниво на значимост $\alpha = 0{,}01$.

*Отг.* надвишава

**Проверка на хипотези с ниво на значимост $\alpha$ за <u>сравняване параметрите на 2 нормално разпределени ГС</u> $X \in N(m_X, \sigma_X)$ и $Y \in N(m_Y, \sigma_Y)$**

Нека от ГС $X \in N(m_X, \sigma_X)$ е направена извадката $X_1, X_2, \ldots, X_{n_X}$, а от ГС $Y \in N(m_Y, \sigma_Y)$ е направена извадката $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_Y}$. С $S_X^2$ и $S_Y^2$ озн. поправените извадкови дисперсии.

| $H_0$ | $H_1$ | наблюдавана стойност | критична област; $H_0$ се отхв., ако: | разпр. |
|---|---|---|---|---|
| $H_0$: $m_X = m_Y$ | $H_1$: $m_X \neq m_Y$ | а) $\sigma_X^2$, $\sigma_Y^2$ – известни<br>$Z_{\text{набл.}} = \dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n_X}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}$ | <br>а) $\lvert Z_{\text{набл.}}\rvert > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>б) $\lvert t_{\text{набл.}}\rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$<br>в) $\lvert Z_{\text{набл.}}\rvert > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ | а) $N(0,1)$ |
| | $H_1$: $m_X < m_Y$ | б) $\sigma_X^2$, $\sigma_Y^2$ – неизвестни, но равни<br>$t_{\text{набл.}} = \dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_X}+\dfrac{1}{n_Y}\right)}}$<br>$S_p^2 = \dfrac{(n_X-1)S_X^2+(n_Y-1)S_Y^2}{n_X+n_Y-2}$ | <br>а) $Z_{\text{набл.}} < -Z_{1-\alpha}$<br>б) $t_{\text{набл.}} < -t_{1-\alpha}$<br>в) $Z_{\text{набл.}} < -Z_{1-\alpha}$ | б) $t(n_X + n_Y - 2)$ |
| | $H_1$: $m_X > m_Y$ | в) $\sigma_X^2$, $\sigma_Y^2$ – неизвестни и $n_X, n_Y \geq 30$<br>$Z_{\text{набл.}} = \dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n_X}+\dfrac{S_Y^2}{n_Y}}}$ | <br>а) $Z_{\text{набл.}} > Z_{1-\alpha}$<br>б) $t_{\text{набл.}} > t_{1-\alpha}$<br>в) $Z_{\text{набл.}} > Z_{1-\alpha}$ | в) $N(0,1)$ |
| $H_0$: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$<br>$H_0$: $\sigma_X = \sigma_Y$ | $H_1$: $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$<br>$H_1$: $\sigma_X \neq \sigma_Y$ | $F_{\text{набл.}} = \dfrac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2}$<br>$S_{\max}^2 = Max\{S_X^2, S_Y^2\}$;<br>$S_{\min}^2 = Min\{S_X^2, S_Y^2\}$; | <br>$F_{\text{набл.}} > F_{1-\frac{\alpha}{2}}$ | $F(n_{\max}-1, n_{\min}-1)$ |
| | $H_1$: $\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$<br>$H_1$: $\sigma_X < \sigma_Y$ | | <br>$F_{\text{набл.}} > F_{1-\alpha}$ | |
| | $H_1$: $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$<br>$H_1$: $\sigma_X > \sigma_Y$ | | | |



Упражнения по Вероятности и Статистика – Таня Янкова

## <u>ЗАДАЧИ</u>

**Зад. 20.2** Дейността на частна фирма е търговия с 2 вида изделия. За да разпредели правилно съотношението при инвестиране в 2-та вида изделия търговеца извършва изследване за ръста на печалбите от търговията с всеки от 2-та вида. Събрани са:

– 36 стойности за печалби в лв. от 1-ви вид изделия:

0,20; 1,25; 1,28; 0,02; 1,62; 0,88; 1,02; 3,08; 2,63; 1,93; 2,04; 2,42; 2,45; 0,12; 0,28; 0,24; 2,48; 2,59; 0,35; 0,11; 1,04; 0,66; 0,39; 1,64; 1,29; 0,15; 2,74; 2,10; 2,36; 0,02; 2,16; 1,70; 1,24; 0,90; 2,96; 1,27

– 41 стойности за печалби от 2-ри вид изделия:

0,00; 2,92; 0,34; 0,98; 0,95; 0,39; 0,21; 0,04; 0,83; 2,49; 0,02; 1,65; 0,05; 0,01; 0,14; 0,02; 0,78; 1,16; 1,14; 1,21; 1,30; 0,01; 0,77; 1,29; 0,04; 0,92; 2,77; 2,82; 0,72; 0,24; 1,21; 0,16; 2,51; 0,59; 1,09; 2,24; 0,50; 0,10; 0,29; 2,88; 1,35.

Ако е известно, че печалбите от продажбата на изделията от 2-та вида са нормално разпределени, да се:

а) намери доверителен интервал за средната печалба $m$ от продажбата на 2-ри вид изделия с доверителна вероятност $\gamma = 0{,}9$;

б) провери с ниво на значимост $\alpha = 0{,}02$ дали печалбите от двата вида изделия са еднакви.

*отг.* а) (0,7136918 ; 1,1950886); б) няма основание да се счита, че печалбите са различни

**Зад. 20.3** Правят се изследвания за точността на изработване на вид детайли от 2 фирми. Направени са измервания на:

– 21 детайла изработени от I-вата фирма, при което се оказало $\overline{X} = 20{,}16$ мм. и извадково отклонение $S_X = 0{,}17$ и

– 31 детайла изработени от II-рата фирма, при което се оказало $\overline{Y} = 20{,}22$ мм. и извадково отклонение $S_Y = 0{,}29$.

Ако е известно, че разпределенията на размерите на произвежданите от 2-те фирми детайли са нормални, да се:

а) намери доверителен интервал за дисперсията $\sigma_X^2$ на размерите на детайлите, изработени от I-вата фирма с доверителна вероятност $\gamma = 0{,}98$.

б) провери с ниво на значимост $\alpha = 0{,}01$ дали II-рата фирма работи не по-малко точно от I-вата.

*отг.* а) (0,0153861 ; 0,0699727); б) I-вата работи по-точно от II-рата

## 21. ПРОВЕРКА ЗА НОРМАЛНОСТ НА ГС

Всички разгледани дотук формули за доверителни интервали и статистически критерии за проверка на хипотези са в сила при условие, че ГС $X$ е нормално разпределена, т.е $X \in N(m, \sigma)$. Това налага разглеждането на методи за проверка на вида на разпределението (по-конкретно проверка за нормалност) на ГС. Често използвани за целта са следните методи:

1. Графично сравняване на плътността на нормалното разпределение с хистограмата на относителните некумулирани честоти, получена на базата на направената извадка.
*Предимства* – нагледност, *недостатъци* – ниска надеждност.

2. Използвайки, че коефициента на вариация за нормалното разпределение е в интервала [8%, 40%], се проверява дали емперичният коефициент на вариация $V_S = \dfrac{S}{\overline{X}}.100\ \%$ принадлежи на този интервал.
*Предимства* – простота, *недостатъци* – различните стойности на коефициента на вариация не съответстват еднозначно само на едно теоретично разпределение.

3. Използвайки **емперичен критерий за нормалност**: Известно е, че за нормалното разпределение коефициента за асиметрия и ексцес са 0$^{\text{-ли}}$, се проверява дали извадковите коефициент на асиметрия и ексцес се отличават по абсолютна стойност от 0 с не повече 3 и 5 пъти съответно по техните стандартни отклонения. Т.е. проверява се хипотезата:

$H_0$: ГС е нормално разпределена $\qquad$ $H_1$: ГС не е нормално разпределена

Ако е изпълнено $\left| \begin{array}{l} |A| \le 3\sqrt{D(A)} \\ |E| \le 5\sqrt{D(E)} \end{array} \right.$, няма основание да се отхвърли $H_0$,

където $D(A) = \dfrac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}$ – дисперсия на коефициента за асиметрия и

$D(E) = \dfrac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}$ – дисперсия на ексцеса.

*Предимства* – отчита се влиянието на формата на емперичното разпределение, *недостатъци* – липса на строго количествена оценка за извадковите коефициент на асиметрия и ексцес.

4. Използвайки **критерия $\chi^2$ на Пирсън**, при който с предварително групирани данни, се проверява

$H_0$: няма съществена разлика между емпер. и теорет. разпределение $\qquad$ $H_1$: разликата е съществена

$\chi^2_{\text{емп.}} = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$, където: $k$ – брой на интервалите,
$n_i$ – наблюдавана честота в $i^{\text{-тия}}$ интервал,
$np_i$ – теоретична честота за $i^{\text{-тия}}$ интервал.

Ако $\chi^2_{\text{емп.}} > \chi^2_{1-\alpha}$, където $\chi^2_{1-\alpha}$ е квантил на $\chi^2(k-r-1)$, то $H_0$ се отхвърля.
($r$ – броя на параметрите в теорет. разпределение)



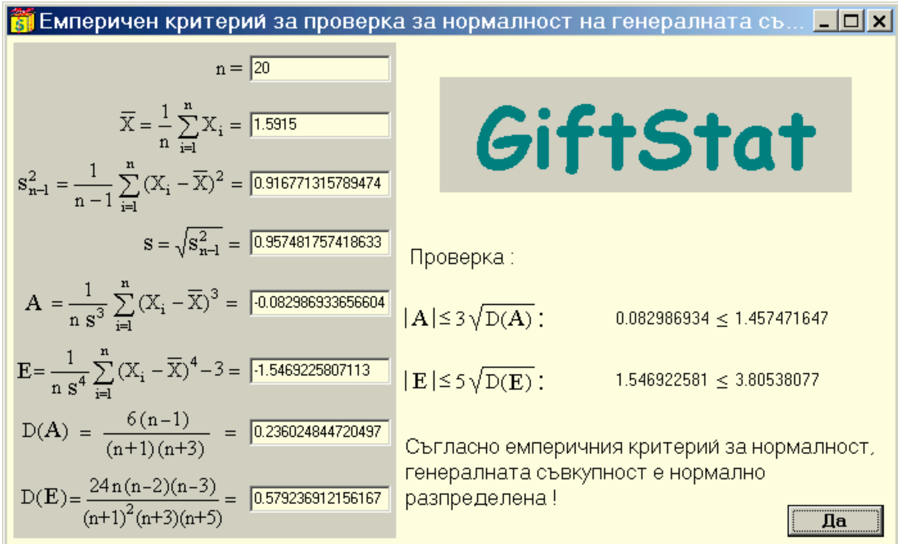


Забележки:
- $\chi^2$ критерия на Пирсън може да се използва при проверка принадлежността на ГС към всяко теоретично разпределение;
- при проверка принадлежността на ГС към нормалното разпределение $N(m, \sigma)$, броя на параметрите е $r = 2$, като за двата параметъра $m$ и $\sigma$ на нормалното разпределение се използват съответно техните неизместени и състоятелни оценки $\overline{X}$ и $S$.

**Пример 21.1** Една от дейностите на частна фирма е търговията със стоки. Направена е извадка със стойности на печалбата в лева при продажба на 20 изделия, която е:
2,20; 1,27; 1,28; 1,02; 1,42; 0,88; 1,65; 3,08; 2,63; 1,95; 2,44; 2,77; 2,45; 0,52; 0,28; 0,35; 2,48; 2,60; 0,45; 0,11.
Да се провери дали печалбата е нормално разпределена, като се използва:
а) емперичен критерий за нормалност;
б) $\chi^2$ критерия на Пирсън, като данните се групират в 4 интервала и се използва ниво на значимост $\alpha = 0,05$.

*Решение*:

а) $H_0$: ГС е нормално разпределена $\qquad$ $H_1$: ГС не е нормално разпределена




б) Първо данните трябва да се групират. Стойностите са в интервала [0 ; 3,2] (избран е така, че удобно да се раздели на 4 равни по дължина подинтервала). Вариационния ред е $0,11 \le 0,28 \le 0,35 \le 0,45 \le 0,52 \le 0,88 \le 1,02 \le 1,27 \le 1,28 \le 1,42 \le 1,65 \le 1,95 \le 2,20 \le 2,44 \le 2,45 \le 2,48 \le 2,60 \le 2,63 \le 2,77 \le 3,08$.

| интервали $(a_{i-1}, a_i]$ | ( 0 ; 0,8 ] | ( 0,8 ; 1,6 ] | ( 1,6 ; 2,4 ] | ( 2,4 ; 3,2 ] |
|---|---|---|---|---|
| абсолютни честоти $n_i$ | 5 | 5 | 3 | 7 |
| теоретична честота $np_i$ | 3,096 | 6,014 | 5,91 | 3,08 |

В таблицата са използвани пресмятанията:

$\overline{X} = 1{,}5915$ ; $S = 0{,}9575$ и ако $\xi \in N(1{,}5915\ ;\ 0{,}9575)$, теоретичните честоти са

$$np_1 = n\,P\{0 < \xi \le 0{,}8\} = 20\,P\left\{\frac{0-1{,}5915}{0{,}9575} < \frac{\xi-1{,}5915}{0{,}9575} \le \frac{0{,}8-1{,}5915}{0{,}9575}\right\} =$$

$$= 20\,P\{-1{,}66 < \eta \le -0{,}83\} = 20(\Phi(1{,}66) - \Phi(0{,}83)) = 20(0{,}9515 - 0{,}7967) = 3{,}096\ ;$$

$$np_2 = n\,P\{0{,}8 < \xi \le 1{,}6\} = 20\,P\left\{\frac{0{,}8-1{,}5915}{0{,}9575} < \frac{\xi-1{,}5915}{0{,}9575} \le \frac{1{,}6-1{,}5915}{0{,}9575}\right\} =$$

$$= 20\,P\{-0{,}83 < \eta \le 0{,}01\} = 20(\Phi(0{,}01) - \Phi(-0{,}83)) = 20(0{,}5040 - 1 + 0{,}7967) = 6{,}014\ ;$$

$$np_3 = n\,P\{1{,}6 < \xi \le 2{,}4\} = 20\,P\left\{\frac{1{,}6-1{,}5915}{0{,}9575} < \frac{\xi-1{,}5915}{0{,}9575} \le \frac{2{,}4-1{,}5915}{0{,}9575}\right\} =$$

$$= 20\,P\{0{,}01 < \eta \le 0{,}84\} = 20(\Phi(0{,}84) - \Phi(0{,}01)) = 20(0{,}7995 - 0{,}5040) = 5{,}91\ ;$$

$$np_4 = n\,P\{2{,}4 < \xi \le 3{,}2\} = 20\,P\left\{\frac{2{,}4-1{,}5915}{0{,}9575} < \frac{\xi-1{,}5915}{0{,}9575} \le \frac{3{,}2-1{,}5915}{0{,}9575}\right\} =$$

$$= 20\,P\{0{,}84 < \eta \le 1{,}68\} = 20(\Phi(1{,}68) - \Phi(0{,}84)) = 20(0{,}9535 - 0{,}7995) = 3{,}08\ ;$$

Тогава $\chi^2_{\text{емп.}} = \dfrac{(5-3{,}096)^2}{3{,}096} + \ldots + \dfrac{(7-3{,}08)^2}{3{,}08} = 7{,}7638.$

От ПРИЛОЖЕНИЕ 3 определяме квантила $\chi^2_{1-\alpha} = \chi^2_{0{,}95} = 3{,}8415$ на $\chi^2(1)$, като $k = 4$, $r = 2$.

Тъй като $\chi^2_{\text{емп.}} > \chi^2_{1-\alpha}$, то $H_0$ се отхвърля (съществува съществена разлика между емперичното и нормалното разпределение) и ГС не е нормално разпределена.

Забележка: При проверката за нормалност на ГС в горния пример се получават различни резултати при използване на емперичния критерий и $\chi^2$ критерия на Пирсън. В този случай следва да се приеме за верен резултата, получен от $\chi^2$ критерия на Пирсън, тъй като се счита, че този метод е по-точен.

## ЗАДАЧИ

**Зад. 21.1** По направени 14 измервания на износването на грайферите (в мм.) на модел автомобилни гуми след определен пробег километри:

7,3; 6,1; 5,9; 8,1; 6,4; 7,8; 8,9; 8,7; 7,7; 9,1; 8,5; 6,9; 7,2; 6,8

да се провери чрез емперичния критерий дали износването е нормално разпределено. *отг.* разпределението е нормално

**Зад. 21.2** Използвайки $\chi^2$ критерия на Пирсън, да се провери дали ръста (в см.) на 7-годишните деца е нормално разпределена величина, като се използват следните групирани статистически данни:

| интервали $(a_{i-1}, a_i]$ | ( 100 ; 108 ] | ( 108 ; 116 ] | ( 116 ; 124 ] | ( 124 ; 132 ] | ( 132 ; 140] |
|---|---|---|---|---|---|
| абс. честоти $n_i$ | 3 | 7 | 12 | 6 | 2 |

*отг.*





## 22. ОБЩИ ЗАДАЧИ ПО СТАТИСТИКА

**Зад. 22.1** За да предвиди приблизителния ръст на печалбата за следващия месец, ресторантьор събира данни за средната стойност на направена поръчка на един човек в неговия ресторант. Ако е известно, че разпределението е нормално, по направена извадка от цената на поръчките на 25 клиента на ресторанта:

0,79; 3,60; 6,83; 26,14; 1,38; 14,06; 10,83; 2,35; 0,06; 9,80; 24,69; 3,09; 15,20; 11,73; 21,80; 20,05; 6,89; 7,56; 0,14; 1,45; 5,96; 14,42; 1,53; 11,30; 6,05.

а) да се намери доверителен интервал за средната стойност $m$ на поръчка на човек с доверителна вероятност $\gamma = 0{,}99$;

б) да се провери дали отклоненията $\sigma$ от средната стойност не превишават 10 лева с ниво на значимост $\alpha = 0{,}05$.

**Зад. 22.2** Комисия от 19 съдии оценява изпълненията на гимнастик, като всеки съдия дава обща оценка за изпълнението. Получените 19 оценки за изпълнението на състезателя X са:

3,74; 5,34; 3,75; 4,29; 4,67; 4,51; 5,94; 5,84; 5,82; 5,11; 3,84; 5,69; 4,25; 5,38; 3,73; 5,98; 4,38; 5,10; 5,00.

а) да се провери дали разпределението на оценките е нормално, чрез емперичния критерий за нормалност;

б) да се намери доверителен интервал за точността на оценяване $\sigma$ на съдиите с доверителна вероятност $\gamma = 0{,}99$;

в) да се провери дали дисперсията $\sigma^2$ на разпределението на оценките е 1 с ниво на значимост $\alpha = 0{,}1$.

**Зад. 22.3** При статистическо изследване върху теглото (в кг.) на 3-месечни бебета са събрани следните групирани данни:

| интервали $(a_{i-1}, a_i]$ | ( 3,8 ; 4,4 ] | ( 4,4 ; 5,0 ] | ( 5,0 ; 5,6 ] | ( 5,6 ; 6,2 ] |
|---|---|---|---|---|
| абс. честоти $n_i$ | 1 | 7 | 9 | 2 |

а) Използвайки $\chi^2$ критерия на Пирсън, да се провери дали теглото на 3-месечните бебета е нормално разпределена величина;

б) Ако теглото е нормално разпределено, да се намери доверителен интервал за отклоненията в теглото на бебетата с доверителна вероятност $\gamma = 0{,}95$.

**Зад. 22.4** Разпределението на средното прекарвано време на клиенти в даден ресторант е нормално с отклонение $\sigma = 30$ мин. Чрез направени наблюдения над 41 клиента през текущата година, от които са получени стойности за средно прекарано време $\overline{X} = 98$ мин. и за извадково отклонение $S = 26$:

а) да се намери доверителен интервал за средното прекарано време $m$ в ресторанта през текущата година с доверителна вероятност $\gamma = 0{,}998$.

б) да се разбере с сигурност $\alpha = 0{,}01$ дали през текущата година тенденцията от предходната година за средното прекарано време в ресторанта 105 мин. ще се запази.

**Зад. 22.5** Една от дейностите на частна фирма е търговията със стоки от даден вид. За да се разпредели правилно съотношението при инвестиране в дейностите на фирмата е необходимо да се направи изследване за ръста на печалбите от тази търговия. Ако е известно, че печалбата от продажба на изделие е нормално разпределена, чрез стойностите на печалбата от продажбата на 36 изделия:
0,20; 1,25; 1,28; 0,02; 1,62; 0,88; 1,02; 3,08; 2,63; 1,93; 2,04; 2,42; 2,45; 0,12; 0,28; 0,24; 2,48; 2,59; 0,35; 0,11; 1,04; 0,66; 0,39; 1,64; 1,29; 0,15; 2,74; 2,10; 2,36; 0,02; 2,16; 1,70; 1,24; 0,90; 2,96; 1,27

а) да се намери доверителен интервал за дисперсията $\sigma^2$ на печалбата с доверителна вероятност $\gamma = 0{,}95$.

б) да се провери с ниво на значимост $\alpha = 0{,}01$ дали средната печалба е не по-малка от 2 лева.

**Зад 22.6** Машина за пакетиране на брашно прави пакети по 1 кг., като максималното допустимо отклонение в теглото на 1 пакет е 0,01 кг. Назначена е комисия за проверка на точността на машината, която от направени измервания на 10 пакета е получила извадково средно $\overline{X} = 1{,}06$ кг. и извадково отклонение $S = 0{,}015$ кг. Ако е известно, че теглото на пакетите е нормално разпределено:

а) да се намери доверителен интервал за отклонението $\sigma$ в теглото на изработените от машината пакети с доверителна вероятност $\gamma = 0{,}99$;

б) да се провери с ниво на значимост $\alpha = 0{,}05$ дали машината пакетира с необходимата точност.

**Зад. 22.7** Детайл трябва да се закали с цел повърхността му да добие твърдост 50 единици по Рокфел (HRC). Използват се 2 метода – I$^{\text{-вия}}$ е ток с висока честота, а II$^{\text{-рия}}$ е нагряване в пещ и охлаждане в машинно масло. Проверката на твърдостта на детайлите показала:

49, 50, 51, 50, 52, 49, 50, 51 – за детайли обработени по I$^{\text{-ви}}$ метод и

51, 47, 53, 52, 50, 51, 49 – за детайли обработени по II$^{\text{-ри}}$ метод.

Ако е известно, че разпределенията на твърдостта на обработваните от 2$^{\text{-та}}$ метода детайли са нормални:

а) да се намери доверителен интервал за твърдостта на детайлите, обработвани по I$^{\text{-ви}}$ метод с доверителна вероятност $\gamma = 0{,}95$.

б) да се провери с ниво на значимост $\alpha = 0{,}01$ дали чрез II$^{\text{-ия}}$ метод се получава желаната твърдост.

в) да се провери с ниво на знач. $\alpha = 0{,}05$ дали 2$^{\text{-та}}$ метода са еднакво точни.

**Зад. 22.8** Известно е, че разпределението на ръста (в см.) на населението е нормално. При статистическо изследване на населението в 3 различни области са направени следните извадки:

*Северна област*: 157; 202; 175; 174; 199; 194; 195; 201;178 179; 170; 194; 158; 180; 205; 204; 162; 203; 203; 181; 174; 198

*Централна област*: 186; 169; 159; 173; 177; 159; 160; 194; 177; 161; 185; 201; 165; 163; 171; 173; 189; 193; 195; 162; 156; 174; 178; 196; 161; 203; 180; 182; 176; 158; 191; 158; 194; 174; 203; 195; 155; 196; 177; 180; 158; 183





*Южна област*: 183; 190; 165; 184; 165; 179; 183; 180; 177; 192; 184; 167; 161; 188; 167; 186; 194; 190; 180; 194; 195; 168; 192; 180; 159; 182; 180; 157; 164; 192; 169; 170; 156

а) Ако е известно, че дисперсията навсякъде е еднаква, с ниво на значимост $\alpha = 0{,}005$ да се провери предположението, че средния ръст на населението в *Северната област* е не по-висок от средния ръст на населението във *Централната област* (Квантила на $t(62)$ заменете с близкия му квантил на $t(60)$, който имате в таблицата на ПРИЛОЖЕНИЕ 2).

б) С ниво на значимост $\alpha = 0{,}03$ да се провери предположението, че средния ръст на населението в *Централната област* е не по-нисък от средния ръст на населението в *Южната област*.

### ***Отговори на общи задачи по статистика:***

Зад. 22.1 а) (4,7301646 ; 13,4858354);
б) $H_0$: $\sigma = 10$ $H_1$: $\sigma > 10$
няма основание да се отхвърли осн. хипотеза срещу алтернативната хипотеза, че превишават

Зад. 22.2 а) нормално е;
б) (0,556861 ; 1,3561606);
в) $H_0$: $\sigma^2 = 1$ $H_1$: $\sigma^2 \neq 1$
няма основание да се отхвърли осн. хипотеза, че дисперсията е 1

Зад. 22.3 а)
б)

Зад. 22.4 а) (83,4758401 ; 112,5241599);
б) $H_0$: $m = 105$ $H_1$: $m \neq 105$
няма основание да се отхвърли осн. хипотеза, че средното прекарано време се запазва

Зад. 22.5 а) (0,6093261 ; 1,5760399);
б) $H_0$: $m = 2$ $H_1$: $m < 2$
осн. хипотеза се отхвърля, т.е. приема се алтернативната, че печалбата е по-малка от 2 лв.

Зад. 22.6 а) (0,0092652 ; 0,0341644);
б) $H_0$: $\sigma = 0{,}01$ $H_1$: $\sigma > 0{,}01$
осн. хипотеза се отхвърля, т.е. приема се алтернативната, че машината не пакетира с необх. точност

Зад. 22.7 а) (49,3846368 ; 51,1153632);
б) $H_0$: $m_Y = 50$ $H_1$: $m_Y \neq 50$
няма основание да се отхвърли осн. хипотеза, че по II$^{\text{-ия}}$ метод се получава желаната твърдост
в) $H_0$: $\sigma_X = \sigma_Y$ $H_1$: $\sigma_X \neq \sigma_Y$
няма основание да се отхвърли осн. хипотеза, че 2$^{\text{-та}}$ метода са еднакво точни

Зад. 22.8 а) $H_0$: $m_X = m_Y$ $H_1$: $m_X > m_Y$
няма основание да се отхвърли осн. хипотеза, че средния ръст в *Северната област* е не е по-висок от този в *Централната област*
б) $H_0$: $m_Y = m_Z$ $H_1$: $m_Y < m_Z$

## 23. ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА ИЗПИТ (ТЕСТОВЕ)

Тема 1

**Зад. 1.** Конспектът по "Вероятности и статистика" съдържа 17 въпроса от "Вероятности" и 9 въпроса от "Статистика". Студент се явява на изпита, като е научил само 12 от въпросите по "Вероятности" и 5 от въпросите по "Статистика".

а) Ако студентът тегли по 1 въпрос от $2^{\text{-та}}$ дяла, да се определят вер. сред падналите му се въпроси "да няма въпрос, който да не е учен" = $A$;
"да има поне 1 въпрос, който да не е учен" = $B$.

б) Ако студентът тегли 3 случайни въпроса от конспекта (без да се разделя на "Вероятности" и "Статистика"), да се определят вероятностите сред избраните въпроси "да няма въпрос, който да не е учен" = $C$;
"да има поне 2 научени" = $D$.

**Зад. 2.** На продавач на лотарийни билети му са останали само 10 билета, от които 2 печеливши. $\text{I}^{\text{-ви}}$ клиент купува 2 билета и след него $\text{II}^{\text{-ри}}$ клиент купува още един билет. Да се определят вероятностите на събитията:

а) "билета, купен от $\text{II}^{\text{-рия}}$ клиент, е печеливш" = $A$;

б) "и $2^{\text{-та}}$ билета, купени от $\text{I}^{\text{-ви}}$ клиент са печеливши", ако е известно, че билета на $\text{II}^{\text{-рия}}$ клиент е непечеливш.

**Зад. 3.** Играч трябва да изтегли карта от тесте с 32 карти. Сл. величина $\xi$ приема стойности, в зависимост от вида на изтеглената карта. Ако картата е с цифра $\xi$ приема стойността на цифрата, а ако е *дама*, *вале*, *поп* или *туз* $\xi$ приема стойност 0.

а) да се определи закона на разпределение на случайната величина $\xi$;

б) да се определи функцията на разпределение на $\xi$;

в) да се определи математическото очакване на величината $\xi$.

**Зад. 4.** Производствен цех произвежда вид детайли, за които се изисква да бъдат с определен диаметър. Максимално допустимото отклонение от този диаметър е 0,05 мм. Отговорника по качествения контрол прави измервания на 11 случайно взети детайла, като получените резултати [мм.] са:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| стойности $X_i$ | 7,85 | 7,9 | 7,95 | 8 | 8,05 |
| честота $n_i$ | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |

Ако е известно, че разпределението на диаметрите на произвежданите детайли е нормално:

а) да се намери неизместена и състоятелна оценка за отклонението $\sigma$ в диаметрите на произвежданите детайли;

б) да се намери доверителен интервал за дисперсията с доверителна вероятност $\gamma = 0{,}99$;

в) да се провери дали детайлите се произвеждат с изискваната точност в диаметъра с ниво на значимост $\alpha = 0{,}01$.





Тема 2

**Зад. 1.** В склад има 2 каси с бутилки бира, като касите съдържат съответно:
$\text{I}^{\text{-ва}}$ каса: общо 9 бутилки, от които 1 с изтекъл срок на годност;
$\text{II}^{\text{-ра}}$ каса: общо 12 бутилки, от които 3 с изтекъл срок на годност.

а) Ако се вземе по 1 бутилка от всяка каса, да се определят вер. сред взетите бутилки "да няма с изтекъл срок на годност" = $A$ и "да има поне 1 с изтекъл срок на годност" = $B$.

б) Ако се вземат 5 бутилки от $\text{II}^{\text{-ра}}$ каса, да се определят вер. сред взетите бутилки "да има точно 1 с изтекъл срок на годност" = $C$ и "да има поне 2 с изтекъл срок на годност" = $D$.

в) Ако в $\text{I}^{\text{-ва}}$ каса е добавена още 1 бутилки без да се знае дали е с изтекъл срок, да се определи вер. случайно избрана бутилка от същата каса да не е с изтекъл срок на годност.

**Зад. 2.** По маршрута на автомобил има 9 светофара. Всеки от светофарите с вероятност 1/3 позволява преминаването в даден момент. Ако сл. величина $\xi$ представлява броя на светофарите преминати от автомобила без изчакване:

а) да се определи закона на разпределение на случайната величина $\xi$;

б) да се определи вер. поне 2 от светофарите да са преминати от автомобила без изчакване;

в) да се определят МО и дисперсията на величината $\xi$.

**Зад. 3.** Вид детайли трябва да бъдат с точен размер 25,15 см. При проверка на качеството са направени измервания на 13 детайла, като са получени следните резултати:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| стойности $X_i$ | 24,85 | 24,95 | 25,00 | 25,10 | 25,15 | 25,20 |
| честота $n_i$ | 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 1 |

Ако е известно, че размерите на детайлите са нормално разпределени, да се:

а) намери неизместена и състоятелна оценка за среден размер на детайлите;

б) намери доверителен интервал за размера $m$ на детайлите с доверителна вероятност $\gamma = 0{,}98$;

в) провери с ниво на значимост $\alpha = 0{,}01$ дали детайлите се произвеждат с необходимия размер.

Тема 3

**Зад. 1.** Инспектор посещава часовете на $V^{\text{-те}}$ класове на едно училище. Разпределението на пълните отличници в класовете е следното:

$V^{А}$ клас: общо 25 ученика, от които 7 пълни отличника
$V^{Б}$ клас: общо 28 ученика, от които 6 пълни отличника
$V^{В}$ клас: общо 24 ученика, от които 5 пълни отличника

а) Ако инспектора вдигне по 1 ученик от всеки клас, да се определят вероятностите сред вдигнатите ученици

- “да няма пълен отличник” = $A$;
- “да има поне 1 пълен отличник” = $B$.

б) Ако инспектора вдигне 3 ученика от $V^{В}$ клас, да се определят вероятностите сред вдигнатите ученици

- “да няма пълен отличник” = $C$;
- “да има поне 2 пълни отличници” = $D$.

**Зад. 2.** Времето [ в минути], което автомобил трябва да изчака на кръстовище, докато светне зелена светлина е непрекъсната случайна величина $\xi$ с плътност

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{при } 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

а) да се намери функцията на разпределение на случайната величина $\xi$;
б) да се определи вер. времето на изчакване да е по-малка от 1 минута;
в) да се определи средната стойност на времето за изчакване.

**Зад. 3.** Клиент поръчва на шивашка фирма е ушиването на партида панталони с определена дължина 110 см. При приемането на панталоните, клиента прави измервания на 8 случайно избрани панталона от партидата, при което получил следните стойности:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| стойности $X_i$ | 108 | 109 | 109,5 | 110 | 110,5 |
| честота $n_i$ | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |

Ако е известно, че дължините на ушитите панталони са нормално разпределени:

а) да се намери неизместена и състоятелна оценка за дисперсията $\sigma^2$ на дължините на ушитите панталони;

б) да се намери доверителен интервал за средната дължина на ушитите панталони с доверителна вероятност $\gamma = 0{,}98$;

в) да се провери дали панталоните са ушити с поръчаната от клиента дължина с ниво на значимост $\alpha = 0{,}05$.





ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Стандартно нормално разпределение $N\,(0,\,1)$ : $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$

| $z$ | **0.00** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.5 | 0.503989379 | 0.507978354 | 0.511966527 | 0.515953499 |
| **0.1** | 0.539827896 | 0.543795364 | 0.547758470 | 0.551716823 | 0.555670033 |
| **0.2** | 0.579259687 | 0.583166134 | 0.587064387 | 0.590954073 | 0.594834824 |
| **0.3** | 0.617911357 | 0.621719457 | 0.625515770 | 0.629299955 | 0.633071673 |
| **0.4** | 0.655421697 | 0.659096986 | 0.662757237 | 0.666402148 | 0.670031420 |
| **0.5** | 0.691462467 | 0.694974281 | 0.698468229 | 0.701944056 | 0.705401511 |
| **0.6** | 0.725746935 | 0.729069152 | 0.732371166 | 0.735652770 | 0.738913765 |
| **0.7** | 0.758036422 | 0.761148006 | 0.764237576 | 0.767304982 | 0.770350076 |
| **0.8** | 0.788144666 | 0.791029974 | 0.793892006 | 0.796730665 | 0.799545861 |
| **0.9** | 0.815939908 | 0.818588775 | 0.821213646 | 0.823814480 | 0.826391238 |
| **1.0** | 0.841344740 | 0.843752345 | 0.846135756 | 0.848494980 | 0.850830029 |
| **1.1** | 0.864333898 | 0.866500443 | 0.868643073 | 0.870761839 | 0.872856799 |
| **1.2** | 0.884930268 | 0.886860491 | 0.888767499 | 0.890651383 | 0.892512238 |
| **1.3** | 0.903199451 | 0.904902018 | 0.906582427 | 0.908240802 | 0.909877266 |
| **1.4** | 0.919243289 | 0.920730109 | 0.922196112 | 0.923641445 | 0.925066257 |
| **1.5** | 0.933192771 | 0.934478263 | 0.935744490 | 0.936991617 | 0.938219807 |
| **1.6** | 0.945200711 | 0.946301077 | 0.947383870 | 0.948449263 | 0.949497431 |
| **1.7** | 0.955434568 | 0.956367097 | 0.957283815 | 0.958184901 | 0.959070532 |
| **1.8** | 0.964069734 | 0.964852162 | 0.965620555 | 0.966375089 | 0.967115942 |
| **1.9** | 0.971283507 | 0.971933461 | 0.972571119 | 0.973196650 | 0.973810224 |
| **2.0** | 0.977249938 | 0.977784475 | 0.978308376 | 0.978821799 | 0.979324905 |
| **2.1** | 0.982135643 | 0.982570884 | 0.982997038 | 0.983414253 | 0.983822675 |
| **2.2** | 0.986096601 | 0.986447466 | 0.986790661 | 0.987126322 | 0.987454580 |
| **2.3** | 0.989275919 | 0.989555950 | 0.989829586 | 0.990096947 | 0.990358150 |
| **2.4** | 0.991802471 | 0.992023745 | 0.992239749 | 0.992450589 | 0.992656367 |
| **2.5** | 0.993790320 | 0.993963425 | 0.994132240 | 0.994296853 | 0.994457354 |
| **2.6** | 0.995338778 | 0.995472853 | 0.995603474 | 0.995730718 | 0.995854658 |
| **2.7** | 0.996532977 | 0.996635789 | 0.996735852 | 0.996833231 | 0.996927987 |
| **2.8** | 0.997444809 | 0.997522864 | 0.997598756 | 0.997672537 | 0.997744260 |
| **2.9** | 0.998134120 | 0.998192789 | 0.998249775 | 0.998305122 | 0.998358871 |
| **3.0** | 0.998650033 | 0.998693692 | 0.998736057 | 0.998777162 | 0.998817040 |
| **3.1** | 0.999032329 | 0.999064496 | 0.999095677 | 0.999125901 | 0.999155194 |
| **3.2** | 0.999312798 | 0.999336262 | 0.999358984 | 0.999380986 | 0.999402289 |
| **3.3** | 0.999516517 | 0.999533462 | 0.999549856 | 0.999565714 | 0.999581052 |
| **3.4** | 0.999663019 | 0.999675135 | 0.999686844 | 0.999698160 | 0.999709094 |
| **3.5** | 0.999767327 | 0.999775903 | 0.999784184 | 0.999792178 | 0.999799895 |
| **3.6** | 0.999840854 | 0.999846865 | 0.999852663 | 0.999858254 | 0.999863647 |
| **3.7** | 0.999892170 | 0.999896341 | 0.999900359 | 0.999904232 | 0.999907962 |
| **3.8** | 0.999927628 | 0.999930493 | 0.999933251 | 0.999935906 | 0.999938461 |
| **3.9** | 0.999951884 | 0.999953833 | 0.999955707 | 0.999957509 | 0.999959242 |

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Стандартно нормално разпределение $N\,(0,\,1)$ : $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$

| $z$ | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.519938873 | 0.523922253 | 0.527903240 | 0.531881440 | 0.535856456 |
| **0.1** | 0.559617712 | 0.563559473 | 0.567494933 | 0.571423709 | 0.575345420 |
| **0.2** | 0.598706274 | 0.602568057 | 0.606419814 | 0.610261186 | 0.614091818 |
| **0.3** | 0.636830590 | 0.640576374 | 0.644308699 | 0.648027240 | 0.651731677 |
| **0.4** | 0.673644759 | 0.677241874 | 0.680822481 | 0.684386299 | 0.687933051 |
| **0.5** | 0.708840345 | 0.712260318 | 0.715661192 | 0.719042736 | 0.722404724 |
| **0.6** | 0.742153956 | 0.745373154 | 0.748571176 | 0.751747842 | 0.754902979 |
| **0.7** | 0.773372720 | 0.776372779 | 0.779350124 | 0.782304631 | 0.785236183 |
| **0.8** | 0.802337508 | 0.805105527 | 0.807849842 | 0.810570386 | 0.813267094 |
| **0.9** | 0.828943888 | 0.831472403 | 0.833976760 | 0.836456943 | 0.838912939 |
| **1.0** | 0.853140919 | 0.855427672 | 0.857690314 | 0.859928875 | 0.862143390 |
| **1.1** | 0.874928011 | 0.876975542 | 0.878999459 | 0.880999834 | 0.882976744 |
| **1.2** | 0.894350161 | 0.896165253 | 0.897957619 | 0.899727366 | 0.901474606 |
| **1.3** | 0.911491948 | 0.913084979 | 0.914656492 | 0.916206622 | 0.917735507 |
| **1.4** | 0.926470700 | 0.927854925 | 0.929219087 | 0.930563344 | 0.931887852 |
| **1.5** | 0.939429229 | 0.940620050 | 0.941792438 | 0.942946563 | 0.944082597 |
| **1.6** | 0.950528549 | 0.951542794 | 0.952540341 | 0.953521368 | 0.954486051 |
| **1.7** | 0.959940886 | 0.960796142 | 0.961636477 | 0.962462069 | 0.963273096 |
| **1.8** | 0.967843287 | 0.968557300 | 0.969258155 | 0.969946026 | 0.970621086 |
| **1.9** | 0.974412010 | 0.975002175 | 0.975580885 | 0.976148306 | 0.976704602 |
| **2.0** | 0.979817852 | 0.980300797 | 0.980773894 | 0.981237299 | 0.981691164 |
| **2.1** | 0.984222449 | 0.984613720 | 0.984996631 | 0.985371321 | 0.985737932 |
| **2.2** | 0.987775567 | 0.988089412 | 0.988396244 | 0.988696189 | 0.988989373 |
| **2.3** | 0.990613313 | 0.990862548 | 0.991105971 | 0.991343692 | 0.991575823 |
| **2.4** | 0.992857185 | 0.993053143 | 0.993244339 | 0.993430871 | 0.993612833 |
| **2.5** | 0.994613830 | 0.994766365 | 0.994915046 | 0.995059954 | 0.995201171 |
| **2.6** | 0.995975369 | 0.996092924 | 0.996207393 | 0.996318845 | 0.996427351 |
| **2.7** | 0.997020181 | 0.997109875 | 0.997197128 | 0.997281997 | 0.997364539 |
| **2.8** | 0.997813974 | 0.997881730 | 0.997947576 | 0.998011558 | 0.998073724 |
| **2.9** | 0.998411062 | 0.998461736 | 0.998510932 | 0.998558689 | 0.998605044 |
| **3.0** | 0.998855724 | 0.998893246 | 0.998929637 | 0.998964929 | 0.998999149 |
| **3.1** | 0.999183581 | 0.999211088 | 0.999237740 | 0.999263560 | 0.999288571 |
| **3.2** | 0.999422914 | 0.999442878 | 0.999462202 | 0.999480905 | 0.999499004 |
| **3.3** | 0.999595887 | 0.999610233 | 0.999624105 | 0.999637518 | 0.999650485 |
| **3.4** | 0.999719659 | 0.999729865 | 0.999739724 | 0.999749247 | 0.999758445 |
| **3.5** | 0.999807344 | 0.999814533 | 0.999821470 | 0.999828164 | 0.999834623 |
| **3.6** | 0.999868846 | 0.999873859 | 0.999878692 | 0.999883351 | 0.999887842 |
| **3.7** | 0.999911555 | 0.999915017 | 0.999918350 | 0.999921560 | 0.999924651 |
| **3.8** | 0.999940919 | 0.999943285 | 0.999945562 | 0.999947752 | 0.999949858 |
| **3.9** | 0.999960908 | 0.999962509 | 0.999964048 | 0.999965527 | 0.999966948 |





# ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Квантили $t_q(k)$ на симетричното $t$–разпределение на Стюдънт

| $k \setminus q$ | **0.60** | **0.75** | **0.90** | **0.95** | **0.975** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0.3249193 | 1.0000008 | 3.0776846 | 6.3137486 | 12.70615 |
| **2** | 0.2886748 | 0.8164966 | 1.885619 | 2.9199873 | 4.3026557 |
| **3** | 0.2766706 | 0.7648919 | 1.6377453 | 2.353363 | 3.1824493 |
| **4** | 0.2707225 | 0.740697 | 1.5332057 | 2.1318465 | 2.7764509 |
| **5** | 0.2671811 | 0.7266868 | 1.4758848 | 2.0150492 | 2.5705776 |
| **6** | 0.2648346 | 0.7175584 | 1.4397551 | 1.9431809 | 2.4469136 |
| **7** | 0.2631668 | 0.7111419 | 1.4149236 | 1.8945775 | 2.3646226 |
| **8** | 0.2619208 | 0.7063863 | 1.3968156 | 1.8595483 | 2.3060056 |
| **9** | 0.2609556 | 0.7027222 | 1.3830288 | 1.8331139 | 2.2621589 |
| **10** | 0.2601848 | 0.6998118 | 1.3721842 | 1.8124615 | 2.2281392 |
| **11** | 0.2595561 | 0.6974449 | 1.3634303 | 1.7958837 | 2.2009863 |
| **12** | 0.2590326 | 0.6954826 | 1.356218 | 1.7822867 | 2.1788128 |
| **13** | 0.2585909 | 0.6938296 | 1.3501722 | 1.7709317 | 2.1603682 |
| **14** | 0.2582124 | 0.6924171 | 1.3450313 | 1.7613092 | 2.1447886 |
| **15** | 0.2578849 | 0.6911966 | 1.3406054 | 1.753051 | 2.1314509 |
| **16** | 0.257599 | 0.6901325 | 1.3367571 | 1.7458842 | 2.1199048 |
| **17** | 0.2573472 | 0.6891946 | 1.3333795 | 1.7396064 | 2.1098185 |
| **18** | 0.2571232 | 0.6883636 | 1.3303907 | 1.7340631 | 2.1009237 |
| **19** | 0.2569232 | 0.6876212 | 1.3277281 | 1.7291313 | 2.0930247 |
| **20** | 0.2567424 | 0.6869544 | 1.3253407 | 1.724718 | 2.0859625 |
| **21** | 0.2565798 | 0.6863525 | 1.3231875 | 1.7207435 | 2.0796142 |
| **22** | 0.256432 | 0.685805 | 1.3212366 | 1.7171442 | 2.0738753 |
| **23** | 0.2562967 | 0.6853065 | 1.3194608 | 1.71387 | 2.0686548 |
| **24** | 0.2561734 | 0.6848495 | 1.3178351 | 1.7108823 | 2.0638981 |
| **25** | 0.2560597 | 0.68443 | 1.3163458 | 1.7081402 | 2.0595371 |
| **26** | 0.2559545 | 0.6840429 | 1.3149725 | 1.7056163 | 2.0555308 |
| **27** | 0.2558579 | 0.6836854 | 1.3137037 | 1.703288 | 2.0518291 |
| **28** | 0.2557675 | 0.6833528 | 1.3125259 | 1.7011303 | 2.0484094 |
| **29** | 0.255684 | 0.6830442 | 1.3114345 | 1.6991271 | 2.0452308 |
| **30** | 0.2556055 | 0.6827554 | 1.3104159 | 1.6972604 | 2.0422704 |
| **31** | 0.2555322 | 0.682486 | 1.3094632 | 1.6955187 | 2.0395146 |
| **32** | 0.2554634 | 0.6822336 | 1.308573 | 1.6938884 | 2.0369316 |
| **33** | 0.2553992 | 0.6819971 | 1.3077374 | 1.6923605 | 2.0345169 |
| **34** | 0.2553384 | 0.6817743 | 1.3069507 | 1.6909235 | 2.0322432 |
| **35** | 0.2552815 | 0.681564 | 1.3062117 | 1.6895729 | 2.0301104 |
| **40** | 0.2550388 | 0.6806727 | 1.3030763 | 1.6838521 | 2.0210746 |
| **45** | 0.2548501 | 0.6799809 | 1.3006502 | 1.6794274 | 2.0141033 |
| **50** | 0.2546994 | 0.6794278 | 1.298713 | 1.6759054 | 2.0085599 |
| **55** | 0.2545761 | 0.6789764 | 1.297135 | 1.6730337 | 2.0040443 |
| **60** | 0.2544732 | 0.6786007 | 1.2958208 | 1.6706485 | 2.0002972 |
| **120** | 0.2539093 | 0.6765401 | 1.288646 | 1.6576496 | 1.979929 |
| $\infty$ | 0.2533472 | 0.6744895 | 1.2815519 | 1.6448535 | 1.9599628 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Квантили $t_q(k)$ на симетричното $t$–разпределение на Стюдънт

| $k \setminus q$ | **0.99** | **0.995** | **0.9975** | **0.999** | **0.9995** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 31.820964 | 63.655898 | 127.32111 | 318.2888 | 636.57761 |
| **2** | 6.9645466 | 9.9249883 | 14.089164 | 22.328459 | 31.599775 |
| **3** | 4.5407069 | 5.8408477 | 7.4531999 | 10.21428 | 12.924429 |
| **4** | 3.7469363 | 4.6040805 | 5.5975397 | 7.1729301 | 8.6100772 |
| **5** | 3.3649303 | 4.0321174 | 4.7733192 | 5.8935257 | 6.868504 |
| **6** | 3.142668 | 3.7074278 | 4.3168257 | 5.2075484 | 5.9587182 |
| **7** | 2.9979492 | 3.499481 | 4.0293526 | 4.7852518 | 5.4080738 |
| **8** | 2.8964678 | 3.3553806 | 3.8325379 | 4.5007619 | 5.0413655 |
| **9** | 2.8214345 | 3.2498428 | 3.6896381 | 4.2968895 | 4.7808862 |
| **10** | 2.7637725 | 3.1692616 | 3.5813719 | 4.1436579 | 4.5867637 |
| **11** | 2.7180795 | 3.1058153 | 3.496607 | 4.0247687 | 4.436879 |
| **12** | 2.6809903 | 3.054538 | 3.4284312 | 3.9295992 | 4.3178443 |
| **13** | 2.6503039 | 3.0122828 | 3.3724791 | 3.8520375 | 4.2209285 |
| **14** | 2.6244925 | 2.9768489 | 3.3256947 | 3.787427 | 4.1403109 |
| **15** | 2.6024827 | 2.9467265 | 3.2860407 | 3.7328573 | 4.07279 |
| **16** | 2.5834925 | 2.9207877 | 3.2519893 | 3.6861456 | 4.0148734 |
| **17** | 2.5669397 | 2.8982322 | 3.2224489 | 3.6457641 | 3.9651059 |
| **18** | 2.5523786 | 2.8784416 | 3.1965828 | 3.6104757 | 3.9217412 |
| **19** | 2.539482 | 2.8609429 | 3.1737 | 3.5793346 | 3.8833241 |
| **20** | 2.5279769 | 2.845336 | 3.1534 | 3.5518315 | 3.8495637 |
| **21** | 2.517645 | 2.8313661 | 3.1352101 | 3.5270932 | 3.8192957 |
| **22** | 2.5083227 | 2.8187605 | 3.1188392 | 3.5049743 | 3.7922291 |
| **23** | 2.4998735 | 2.8073373 | 3.1039963 | 3.4849654 | 3.7676364 |
| **24** | 2.492161 | 2.7969509 | 3.0905358 | 3.4667755 | 3.7453719 |
| **25** | 2.4851033 | 2.7874376 | 3.078203 | 3.4501863 | 3.7251448 |
| **26** | 2.4786277 | 2.7787246 | 3.0668889 | 3.4349796 | 3.7066638 |
| **27** | 2.4726614 | 2.7706847 | 3.0565207 | 3.4210098 | 3.6894926 |
| **28** | 2.4671408 | 2.7632632 | 3.0469528 | 3.4082041 | 3.673922 |
| **29** | 2.4620203 | 2.7563874 | 3.0380397 | 3.3962715 | 3.6595156 |
| **30** | 2.4572637 | 2.7499846 | 3.0297815 | 3.385212 | 3.6459824 |
| **31** | 2.4528254 | 2.7440365 | 3.0221054 | 3.3748802 | 3.6334677 |
| **32** | 2.4486781 | 2.7384885 | 3.0149386 | 3.3652759 | 3.6218262 |
| **33** | 2.4447945 | 2.7332862 | 3.0082447 | 3.3563265 | 3.6109122 |
| **34** | 2.4411474 | 2.7283932 | 3.001951 | 3.3479591 | 3.6007259 |
| **35** | 2.4377186 | 2.7238093 | 2.9960574 | 3.3400283 | 3.5911216 |
| **40** | 2.4232577 | 2.7044553 | 2.9711737 | 3.3069227 | 3.5509584 |
| **45** | 2.4121164 | 2.6895941 | 2.9520743 | 3.2814569 | 3.5202538 |
| **50** | 2.403267 | 2.6777889 | 2.9369767 | 3.2613752 | 3.4959521 |
| **55** | 2.396082 | 2.668221 | 2.9247167 | 3.2451499 | 3.4764525 |
| **60** | 2.3901157 | 2.660272 | 2.9145667 | 3.2316893 | 3.4601544 |
| **120** | 2.3578286 | 2.6174166 | 2.8598515 | 3.1595118 | 3.373425 |
| $\infty$ | 2.326347 | 2.5758313 | 2.8070416 | 3.0902526 | 3.2905599 |





## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Квантили $\chi^2_q(k)$ на асиметричното $\chi^2$–разпределение на Пирсън

| $k \setminus q$ | **0.005** | **0.010** | **0.025** | **0.050** | **0.100** | **0.500** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 3.927E-05 | 0.0001571 | 0.0009821 | 0.0039322 | 0.0157907 | 0.4549362 |
| **2** | 0.0100247 | 0.0201004 | 0.0506357 | 0.1025862 | 0.2107208 | 1.3862936 |
| **3** | 0.0717235 | 0.1148316 | 0.2157949 | 0.351846 | 0.5843755 | 2.3659727 |
| **4** | 0.2069836 | 0.2971068 | 0.484419 | 0.7107241 | 1.0636243 | 3.3566947 |
| **5** | 0.4117508 | 0.5542969 | 0.8312089 | 1.1454773 | 1.6103091 | 4.3514587 |
| **6** | 0.6757334 | 0.8720833 | 1.2373419 | 1.6353805 | 2.2041303 | 5.348119 |
| **7** | 0.9892509 | 1.2390317 | 1.689864 | 2.1673492 | 2.8331052 | 6.3458093 |
| **8** | 1.3444027 | 1.6465062 | 2.1797247 | 2.7326326 | 3.4895374 | 7.3441201 |
| **9** | 1.7349114 | 2.0878894 | 2.7003887 | 3.3251151 | 4.1681557 | 8.342832 |
| **10** | 2.1558454 | 2.5581988 | 3.2469635 | 3.9402953 | 4.8651783 | 9.3418161 |
| **11** | 2.6032019 | 3.0534957 | 3.8157424 | 4.574809 | 5.5777883 | 10.340996 |
| **12** | 3.073785 | 3.5705513 | 4.4037775 | 5.2260277 | 6.3037959 | 11.340322 |
| **13** | 3.565042 | 4.1068996 | 5.0087376 | 5.8918606 | 7.0414997 | 12.339753 |
| **14** | 4.0746588 | 4.6604155 | 5.6287238 | 6.5706316 | 7.7895377 | 13.339272 |
| **15** | 4.6008741 | 5.2293559 | 6.2621229 | 7.2609348 | 8.5467531 | 14.338857 |
| **16** | 5.1421643 | 5.8121968 | 6.9076641 | 7.9616386 | 9.3122353 | 15.338497 |
| **17** | 5.6972737 | 6.407742 | 7.5641786 | 8.6717536 | 10.085183 | 16.338179 |
| **18** | 6.2647659 | 7.0149034 | 8.2307372 | 9.3904479 | 10.864937 | 17.337902 |
| **19** | 6.8439233 | 7.6326976 | 8.9065144 | 10.117006 | 11.650912 | 18.33765 |
| **20** | 7.4338114 | 8.2603684 | 9.5907725 | 10.850799 | 12.442601 | 19.33743 |
| **21** | 8.0336021 | 8.8971724 | 10.282907 | 11.591316 | 13.239596 | 20.337228 |
| **22** | 8.6426806 | 9.5424944 | 10.98233 | 12.338009 | 14.04149 | 21.337044 |
| **23** | 9.2603831 | 10.195689 | 11.688534 | 13.090505 | 14.847954 | 22.33688 |
| **24** | 9.8861987 | 10.856349 | 12.401146 | 13.848422 | 15.658679 | 23.33673 |
| **25** | 10.519647 | 11.523951 | 13.119707 | 14.611396 | 16.473405 | 24.336584 |
| **26** | 11.160218 | 12.198177 | 13.843881 | 15.379163 | 17.29188 | 25.336458 |
| **27** | 11.807655 | 12.878468 | 14.573373 | 16.151395 | 18.113889 | 26.336341 |
| **28** | 12.461281 | 13.564666 | 15.307854 | 16.927876 | 18.939235 | 27.336232 |
| **29** | 13.121067 | 14.256406 | 16.047051 | 17.708381 | 19.76774 | 28.33613 |
| **30** | 13.786682 | 14.953464 | 16.790756 | 18.492667 | 20.599245 | 29.336028 |
| **35** | 17.191729 | 18.50887 | 20.56938 | 22.465009 | 24.796648 | 34.335635 |
| **40** | 20.706577 | 22.164201 | 24.433058 | 26.509296 | 29.050516 | 39.335341 |
| **45** | 24.310982 | 25.9012 | 28.366177 | 30.612259 | 33.350378 | 44.335118 |
| **50** | 27.990825 | 29.706725 | 32.357385 | 34.764236 | 37.688637 | 49.334941 |
| **55** | 31.734894 | 33.570516 | 36.398113 | 38.958051 | 42.05962 | 54.334787 |
| **60** | 35.534397 | 37.484796 | 40.481707 | 43.187966 | 46.458885 | 59.334668 |
| **65** | 39.383227 | 41.443554 | 44.60297 | 47.449572 | 50.882935 | 64.334557 |
| **70** | 43.275305 | 45.4417 | 48.757536 | 51.739263 | 55.328945 | 69.334479 |
| **75** | 47.206144 | 49.475122 | 52.941919 | 56.054055 | 59.794557 | 74.334396 |
| **80** | 51.171933 | 53.539983 | 57.153152 | 60.391459 | 64.277842 | 79.334325 |
| **90** | 59.196327 | 61.754019 | 65.646592 | 69.126018 | 73.291079 | 89.334216 |
| **100** | 67.327533 | 70.064995 | 74.221882 | 77.929442 | 82.358127 | 99.33413 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Квантили $\chi_q^2(k)$ на асиметричното $\chi^2$–разпределение на Пирсън

| $k \setminus q$ | **0.900** | **0.950** | **0.975** | **0.990** | **0.995** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2.7055406 | 3.8414553 | 5.0239026 | 6.6348913 | 7.8793998 |
| **2** | 4.6051761 | 5.9914764 | 7.3777791 | 9.210351 | 10.59653 |
| **3** | 6.2513945 | 7.8147247 | 9.348404 | 11.344882 | 12.838073 |
| **4** | 7.779434 | 9.4877285 | 11.143262 | 13.276699 | 14.860166 |
| **5** | 9.2363491 | 11.070483 | 12.832492 | 15.086317 | 16.749648 |
| **6** | 10.644637 | 12.591577 | 14.449355 | 16.811872 | 18.547513 |
| **7** | 12.017031 | 14.067127 | 16.012774 | 18.475324 | 20.277738 |
| **8** | 13.361562 | 15.507312 | 17.534545 | 20.090159 | 21.954861 |
| **9** | 14.683663 | 16.91896 | 19.022778 | 21.666048 | 23.589275 |
| **10** | 15.987175 | 18.307029 | 20.483201 | 23.209287 | 25.188055 |
| **11** | 17.275007 | 19.675153 | 21.920023 | 24.725022 | 26.756864 |
| **12** | 18.54934 | 21.026055 | 23.33666 | 26.216964 | 28.29966 |
| **13** | 19.811933 | 22.362027 | 24.735581 | 27.688184 | 29.819318 |
| **14** | 21.064141 | 23.684782 | 26.118935 | 29.141163 | 31.319425 |
| **15** | 22.307121 | 24.995797 | 27.488365 | 30.577951 | 32.801491 |
| **16** | 23.541821 | 26.296221 | 28.845325 | 31.999861 | 34.267053 |
| **17** | 24.769028 | 27.5871 | 30.190983 | 33.408717 | 35.718378 |
| **18** | 25.989418 | 28.869321 | 31.52641 | 34.805237 | 37.156386 |
| **19** | 27.203565 | 30.143505 | 32.852337 | 36.190775 | 38.582122 |
| **20** | 28.41197 | 31.41042 | 34.169581 | 37.566272 | 39.996856 |
| **21** | 29.615086 | 32.670558 | 35.478856 | 38.932232 | 41.400943 |
| **22** | 30.813285 | 33.92446 | 36.780678 | 40.289448 | 42.795664 |
| **23** | 32.00689 | 35.17246 | 38.075609 | 41.638334 | 44.181385 |
| **24** | 33.196235 | 36.415026 | 39.36406 | 42.979781 | 45.558363 |
| **25** | 34.381583 | 37.652489 | 40.646498 | 44.314014 | 46.927966 |
| **26** | 35.563164 | 38.88513 | 41.923138 | 45.641636 | 48.289777 |
| **27** | 36.741228 | 40.113266 | 43.194521 | 46.962837 | 49.645035 |
| **28** | 37.915907 | 41.337152 | 44.46079 | 48.278166 | 50.993559 |
| **29** | 39.087475 | 42.556948 | 45.722279 | 49.587829 | 52.335495 |
| **30** | 40.256017 | 43.772954 | 46.979218 | 50.892181 | 53.671868 |
| **35** | 46.058772 | 49.801832 | 53.203308 | 57.341988 | 60.274592 |
| **40** | 51.805044 | 55.758487 | 59.341679 | 63.690771 | 66.766047 |
| **45** | 57.505291 | 61.656219 | 65.410131 | 69.956901 | 73.166036 |
| **50** | 63.167113 | 67.504805 | 71.420194 | 76.153802 | 79.489839 |
| **55** | 68.796207 | 73.311479 | 77.380436 | 82.291977 | 85.749058 |
| **60** | 74.396999 | 79.081954 | 83.297706 | 88.37943 | 91.951806 |
| **65** | 79.97299 | 84.82064 | 89.177163 | 94.421996 | 98.104916 |
| **70** | 85.527036 | 90.531262 | 95.023149 | 100.42505 | 104.21477 |
| **75** | 91.061453 | 96.216663 | 100.83929 | 106.39285 | 110.28543 |
| **80** | 96.578196 | 101.87947 | 106.62854 | 112.32879 | 116.32093 |
| **90** | 107.56501 | 113.14523 | 118.13591 | 124.1162 | 128.29868 |
| **100** | 118.498 | 124.3421 | 129.56125 | 135.80689 | 140.16971 |



Упражнения по Вероятности и Статистика – Таня Янкова

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Квантили $F_q(k_1, k_2)$ на асиметричното $F$–разпределение на Фишер при <u>$q = 0.75$</u>

| $k_1 \setminus k_2$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 5.83 | 7.50 | 8.20 | 8.58 | 8.82 | 8.98 | 9.10 | 9.19 | 9.26 | 9.32 |
| **2** | 2.57 | 3.00 | 3.15 | 3.23 | 3.28 | 3.31 | 3.34 | 3.35 | 3.37 | 3.38 |
| **3** | 2.02 | 2.28 | 2.36 | 2.39 | 2.41 | 2.42 | 2.43 | 2.44 | 2.44 | 2.44 |
| **4** | 1.81 | 2.00 | 2.05 | 2.06 | 2.07 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 |
| **5** | 1.69 | 1.85 | 1.88 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 |
| **6** | 1.62 | 1.76 | 1.78 | 1.79 | 1.79 | 1.78 | 1.78 | 1.78 | 1.77 | 1.77 |
| **7** | 1.57 | 1.70 | 1.72 | 1.72 | 1.71 | 1.71 | 1.70 | 1.70 | 1.69 | 1.69 |
| **8** | 1.54 | 1.66 | 1.67 | 1.66 | 1.66 | 1.65 | 1.64 | 1.64 | 1.63 | 1.63 |
| **9** | 1.51 | 1.62 | 1.63 | 1.63 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.59 |
| **10** | 1.49 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.55 |
| **11** | 1.47 | 1.58 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.53 | 1.52 |
| **12** | 1.46 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.51 | 1.50 |
| **13** | 1.45 | 1.55 | 1.55 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.49 | 1.48 |
| **14** | 1.44 | 1.53 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.46 |
| **15** | 1.43 | 1.52 | 1.52 | 1.51 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.46 | 1.45 |
| **16** | 1.42 | 1.51 | 1.51 | 1.50 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.44 |
| **17** | 1.42 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.43 |
| **18** | 1.41 | 1.50 | 1.49 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.42 |
| **19** | 1.41 | 1.49 | 1.49 | 1.47 | 1.46 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.41 |
| **20** | 1.40 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.40 |
| **21** | 1.40 | 1.48 | 1.48 | 1.46 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 |
| **22** | 1.40 | 1.48 | 1.47 | 1.45 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 |
| **23** | 1.39 | 1.47 | 1.47 | 1.45 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 |
| **24** | 1.39 | 1.47 | 1.46 | 1.44 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.38 |
| **25** | 1.39 | 1.47 | 1.46 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 |
| **26** | 1.38 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 |
| **27** | 1.38 | 1.46 | 1.45 | 1.43 | 1.42 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 |
| **28** | 1.38 | 1.46 | 1.45 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 |
| **29** | 1.38 | 1.45 | 1.45 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 |
| **30** | 1.38 | 1.45 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 |
| **35** | 1.37 | 1.44 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 |
| **40** | 1.36 | 1.44 | 1.42 | 1.40 | 1.39 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 |
| **50** | 1.35 | 1.43 | 1.41 | 1.39 | 1.37 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 |
| **55** | 1.35 | 1.42 | 1.41 | 1.39 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 |
| **60** | 1.35 | 1.42 | 1.41 | 1.38 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 |
| **70** | 1.35 | 1.41 | 1.40 | 1.38 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 |
| **80** | 1.34 | 1.41 | 1.40 | 1.38 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 |
| **90** | 1.34 | 1.41 | 1.39 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 |
| **100** | 1.34 | 1.41 | 1.39 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.30 | 1.29 | 1.28 |
| **120** | 1.34 | 1.40 | 1.39 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 |
| $\infty$ | 1.32 | 1.39 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.25 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Квантили $F_q(k_1, k_2)$ на асиметричното $F$–разпределение на Фишер при $q = 0.75$

| $k_1 \setminus k_2$ | **12** | **15** | **20** | **24** | **30** | **40** | **60** | **120** | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 9.41 | 9.49 | 9.58 | 9.63 | 9.67 | 9.71 | 9.76 | 9.80 | 9.85 |
| **2** | 3.39 | 3.41 | 3.43 | 3.43 | 3.44 | 3.45 | 3.46 | 3.47 | 3.48 |
| **3** | 2.45 | 2.46 | 2.46 | 2.46 | 2.47 | 2.47 | 2.47 | 2.47 | 2.47 |
| **4** | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 |
| **5** | 1.89 | 1.89 | 1.88 | 1.88 | 1.88 | 1.88 | 1.87 | 1.87 | 1.87 |
| **6** | 1.77 | 1.76 | 1.76 | 1.75 | 1.75 | 1.75 | 1.74 | 1.74 | 1.74 |
| **7** | 1.68 | 1.68 | 1.67 | 1.67 | 1.66 | 1.66 | 1.65 | 1.65 | 1.65 |
| **8** | 1.62 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.58 |
| **9** | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.54 | 1.53 | 1.53 |
| **10** | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.52 | 1.51 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.48 |
| **11** | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.47 | 1.46 | 1.45 |
| **12** | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 |
| **13** | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.42 | 1.41 | 1.40 |
| **14** | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 |
| **15** | 1.44 | 1.43 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 |
| **16** | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 |
| **17** | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 |
| **18** | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 |
| **19** | 1.40 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.30 |
| **20** | 1.39 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.29 |
| **21** | 1.38 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.28 |
| **22** | 1.37 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 |
| **23** | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.28 | 1.27 |
| **24** | 1.36 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.26 |
| **25** | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.25 |
| **26** | 1.35 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.26 | 1.25 |
| **27** | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.24 |
| **28** | 1.34 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.25 | 1.24 |
| **29** | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.27 | 1.26 | 1.25 | 1.23 |
| **30** | 1.34 | 1.32 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.24 | 1.23 |
| **35** | 1.32 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.25 | 1.24 | 1.22 | 1.20 |
| **40** | 1.31 | 1.30 | 1.28 | 1.26 | 1.25 | 1.24 | 1.22 | 1.21 | 1.19 |
| **50** | 1.30 | 1.28 | 1.26 | 1.25 | 1.23 | 1.22 | 1.20 | 1.19 | 1.16 |
| **55** | 1.29 | 1.27 | 1.25 | 1.24 | 1.23 | 1.21 | 1.20 | 1.18 | 1.16 |
| **60** | 1.29 | 1.27 | 1.25 | 1.24 | 1.22 | 1.21 | 1.19 | 1.17 | 1.15 |
| **70** | 1.28 | 1.26 | 1.24 | 1.23 | 1.21 | 1.20 | 1.18 | 1.16 | 1.13 |
| **80** | 1.27 | 1.26 | 1.23 | 1.22 | 1.21 | 1.19 | 1.17 | 1.15 | 1.12 |
| **90** | 1.27 | 1.25 | 1.23 | 1.22 | 1.20 | 1.19 | 1.17 | 1.15 | 1.12 |
| **100** | 1.27 | 1.25 | 1.23 | 1.21 | 1.20 | 1.18 | 1.16 | 1.14 | 1.11 |
| **120** | 1.26 | 1.24 | 1.22 | 1.21 | 1.19 | 1.18 | 1.16 | 1.13 | 1.10 |
| $\infty$ | 1.24 | 1.22 | 1.19 | 1.18 | 1.16 | 1.14 | 1.12 | 1.08 | 1.00 |





## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Квантили $F_q(k_1, k_2)$ на асиметричното $F$–разпределение на Фишер при $q = 0.90$

| $k_1 \setminus k_2$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 39.86 | 49.50 | 53.59 | 55.83 | 57.24 | 58.20 | 58.91 | 59.44 | 59.86 | 60.19 |
| **2** | 8.53 | 9.00 | 9.16 | 9.24 | 9.29 | 9.33 | 9.35 | 9.37 | 9.38 | 9.39 |
| **3** | 5.54 | 5.46 | 5.39 | 5.34 | 5.31 | 5.28 | 5.27 | 5.25 | 5.24 | 5.23 |
| **4** | 4.54 | 4.32 | 4.19 | 4.11 | 4.05 | 4.01 | 3.98 | 3.95 | 3.94 | 3.92 |
| **5** | 4.06 | 3.78 | 3.62 | 3.52 | 3.45 | 3.40 | 3.37 | 3.34 | 3.32 | 3.30 |
| **6** | 3.78 | 3.46 | 3.29 | 3.18 | 3.11 | 3.05 | 3.01 | 2.98 | 2.96 | 2.94 |
| **7** | 3.59 | 3.26 | 3.07 | 2.96 | 2.88 | 2.83 | 2.78 | 2.75 | 2.72 | 2.70 |
| **8** | 3.46 | 3.11 | 2.92 | 2.81 | 2.73 | 2.67 | 2.62 | 2.59 | 2.56 | 2.54 |
| **9** | 3.36 | 3.01 | 2.81 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.51 | 2.47 | 2.44 | 2.42 |
| **10** | 3.29 | 2.92 | 2.73 | 2.61 | 2.52 | 2.46 | 2.41 | 2.38 | 2.35 | 2.32 |
| **11** | 3.23 | 2.86 | 2.66 | 2.54 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.30 | 2.27 | 2.25 |
| **12** | 3.18 | 2.81 | 2.61 | 2.48 | 2.39 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.21 | 2.19 |
| **13** | 3.14 | 2.76 | 2.56 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.23 | 2.20 | 2.16 | 2.14 |
| **14** | 3.10 | 2.73 | 2.52 | 2.39 | 2.31 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.10 |
| **15** | 3.07 | 2.70 | 2.49 | 2.36 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.09 | 2.06 |
| **16** | 3.05 | 2.67 | 2.46 | 2.33 | 2.24 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.06 | 2.03 |
| **17** | 3.03 | 2.64 | 2.44 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 | 2.00 |
| **18** | 3.01 | 2.62 | 2.42 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.08 | 2.04 | 2.00 | 1.98 |
| **19** | 2.99 | 2.61 | 2.40 | 2.27 | 2.18 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.98 | 1.96 |
| **20** | 2.97 | 2.59 | 2.38 | 2.25 | 2.16 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.96 | 1.94 |
| **21** | 2.96 | 2.57 | 2.36 | 2.23 | 2.14 | 2.08 | 2.02 | 1.98 | 1.95 | 1.92 |
| **22** | 2.95 | 2.56 | 2.35 | 2.22 | 2.13 | 2.06 | 2.01 | 1.97 | 1.93 | 1.90 |
| **23** | 2.94 | 2.55 | 2.34 | 2.21 | 2.11 | 2.05 | 1.99 | 1.95 | 1.92 | 1.89 |
| **24** | 2.93 | 2.54 | 2.33 | 2.19 | 2.10 | 2.04 | 1.98 | 1.94 | 1.91 | 1.88 |
| **25** | 2.92 | 2.53 | 2.32 | 2.18 | 2.09 | 2.02 | 1.97 | 1.93 | 1.89 | 1.87 |
| **26** | 2.91 | 2.52 | 2.31 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.88 | 1.86 |
| **27** | 2.90 | 2.51 | 2.30 | 2.17 | 2.07 | 2.00 | 1.95 | 1.91 | 1.87 | 1.85 |
| **28** | 2.89 | 2.50 | 2.29 | 2.16 | 2.06 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.87 | 1.84 |
| **29** | 2.89 | 2.50 | 2.28 | 2.15 | 2.06 | 1.99 | 1.93 | 1.89 | 1.86 | 1.83 |
| **30** | 2.88 | 2.49 | 2.28 | 2.14 | 2.05 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.85 | 1.82 |
| **35** | 2.85 | 2.46 | 2.25 | 2.11 | 2.02 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.82 | 1.79 |
| **40** | 2.84 | 2.44 | 2.23 | 2.09 | 2.00 | 1.93 | 1.87 | 1.83 | 1.79 | 1.76 |
| **50** | 2.81 | 2.41 | 2.20 | 2.06 | 1.97 | 1.90 | 1.84 | 1.80 | 1.76 | 1.73 |
| **55** | 2.80 | 2.40 | 2.19 | 2.05 | 1.95 | 1.88 | 1.83 | 1.78 | 1.75 | 1.72 |
| **60** | 2.79 | 2.39 | 2.18 | 2.04 | 1.95 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.74 | 1.71 |
| **70** | 2.78 | 2.38 | 2.16 | 2.03 | 1.93 | 1.86 | 1.80 | 1.76 | 1.72 | 1.69 |
| **80** | 2.77 | 2.37 | 2.15 | 2.02 | 1.92 | 1.85 | 1.79 | 1.75 | 1.71 | 1.68 |
| **90** | 2.76 | 2.36 | 2.15 | 2.01 | 1.91 | 1.84 | 1.78 | 1.74 | 1.70 | 1.67 |
| **100** | 2.76 | 2.36 | 2.14 | 2.00 | 1.91 | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.69 | 1.66 |
| **120** | 2.75 | 2.35 | 2.13 | 1.99 | 1.90 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.68 | 1.65 |
| $\infty$ | 2.71 | 2.30 | 2.08 | 1.94 | 1.85 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.63 | 1.60 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Квантили $F_q(k_1, k_2)$ на асиметричното $F$–разпределение на Фишер при $q = 0.90$

| $k_1 \setminus k_2$ | **12** | **15** | **20** | **24** | **30** | **40** | **60** | **120** | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 60.71 | 61.22 | 61.74 | 62.00 | 62.26 | 62.53 | 62.79 | 63.06 | 63.33 |
| **2** | 9.41 | 9.42 | 9.44 | 9.45 | 9.46 | 9.47 | 9.47 | 9.48 | 9.49 |
| **3** | 5.22 | 5.20 | 5.18 | 5.18 | 5.17 | 5.16 | 5.15 | 5.14 | 5.13 |
| **4** | 3.90 | 3.87 | 3.84 | 3.83 | 3.82 | 3.80 | 3.79 | 3.78 | 3.76 |
| **5** | 3.27 | 3.24 | 3.21 | 3.19 | 3.17 | 3.16 | 3.14 | 3.12 | 3.11 |
| **6** | 2.90 | 2.87 | 2.84 | 2.82 | 2.80 | 2.78 | 2.76 | 2.74 | 2.72 |
| **7** | 2.67 | 2.63 | 2.59 | 2.58 | 2.56 | 2.54 | 2.51 | 2.49 | 2.47 |
| **8** | 2.50 | 2.46 | 2.42 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.34 | 2.32 | 2.29 |
| **9** | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.28 | 2.25 | 2.23 | 2.21 | 2.18 | 2.16 |
| **10** | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.18 | 2.16 | 2.13 | 2.11 | 2.08 | 2.06 |
| **11** | 2.21 | 2.17 | 2.12 | 2.10 | 2.08 | 2.05 | 2.03 | 2.00 | 1.97 |
| **12** | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.04 | 2.01 | 1.99 | 1.96 | 1.93 | 1.90 |
| **13** | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.98 | 1.96 | 1.93 | 1.90 | 1.88 | 1.85 |
| **14** | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.94 | 1.91 | 1.89 | 1.86 | 1.83 | 1.80 |
| **15** | 2.02 | 1.97 | 1.92 | 1.90 | 1.87 | 1.85 | 1.82 | 1.79 | 1.76 |
| **16** | 1.99 | 1.94 | 1.89 | 1.87 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 |
| **17** | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 |
| **18** | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 | 1.66 |
| **19** | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.79 | 1.76 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.63 |
| **20** | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.77 | 1.74 | 1.71 | 1.68 | 1.64 | 1.61 |
| **21** | 1.87 | 1.83 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.62 | 1.59 |
| **22** | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.60 | 1.57 |
| **23** | 1.84 | 1.80 | 1.74 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.62 | 1.59 | 1.55 |
| **24** | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.57 | 1.53 |
| **25** | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.52 |
| **26** | 1.81 | 1.76 | 1.71 | 1.68 | 1.65 | 1.61 | 1.58 | 1.54 | 1.50 |
| **27** | 1.80 | 1.75 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.60 | 1.57 | 1.53 | 1.49 |
| **28** | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.52 | 1.48 |
| **29** | 1.78 | 1.73 | 1.68 | 1.65 | 1.62 | 1.58 | 1.55 | 1.51 | 1.47 |
| **30** | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.50 | 1.46 |
| **35** | 1.74 | 1.69 | 1.63 | 1.60 | 1.57 | 1.53 | 1.50 | 1.46 | 1.41 |
| **40** | 1.71 | 1.66 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.47 | 1.42 | 1.38 |
| **50** | 1.68 | 1.63 | 1.57 | 1.54 | 1.50 | 1.46 | 1.42 | 1.38 | 1.33 |
| **55** | 1.67 | 1.61 | 1.55 | 1.52 | 1.49 | 1.45 | 1.41 | 1.36 | 1.31 |
| **60** | 1.66 | 1.60 | 1.54 | 1.51 | 1.48 | 1.44 | 1.40 | 1.35 | 1.29 |
| **70** | 1.64 | 1.59 | 1.53 | 1.49 | 1.46 | 1.42 | 1.37 | 1.32 | 1.27 |
| **80** | 1.63 | 1.57 | 1.51 | 1.48 | 1.44 | 1.40 | 1.36 | 1.31 | 1.24 |
| **90** | 1.62 | 1.56 | 1.50 | 1.47 | 1.43 | 1.39 | 1.35 | 1.29 | 1.23 |
| **100** | 1.61 | 1.56 | 1.49 | 1.46 | 1.42 | 1.38 | 1.34 | 1.28 | 1.21 |
| **120** | 1.60 | 1.55 | 1.48 | 1.45 | 1.41 | 1.37 | 1.32 | 1.26 | 1.19 |
| $\infty$ | 1.55 | 1.49 | 1.42 | 1.38 | 1.34 | 1.30 | 1.24 | 1.17 | 1.00 |





## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Квантили $F_q(k_1, k_2)$ на асиметричното $F$–разпределение на Фишер при $q = 0.95$

| $k_1 \setminus k_2$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 161.4 | 199.5 | 215.7 | 224.6 | 230.2 | 234.0 | 236.8 | 238.9 | 240.5 | 241.9 |
| **2** | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19.40 |
| **3** | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 |
| **4** | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 |
| **5** | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 |
| **6** | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 |
| **7** | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 |
| **8** | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 |
| **9** | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 |
| **10** | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 |
| **11** | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.85 |
| **12** | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 |
| **13** | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 |
| **14** | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 |
| **15** | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 |
| **16** | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 |
| **17** | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 |
| **18** | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 |
| **19** | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 |
| **20** | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 |
| **21** | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 |
| **22** | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 | 2.30 |
| **23** | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 | 2.27 |
| **24** | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 | 2.25 |
| **25** | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 | 2.24 |
| **26** | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 |
| **27** | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.20 |
| **28** | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 |
| **29** | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.18 |
| **30** | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 |
| **35** | 4.12 | 3.27 | 2.87 | 2.64 | 2.49 | 2.37 | 2.29 | 2.22 | 2.16 | 2.11 |
| **40** | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 |
| **50** | 4.03 | 3.18 | 2.79 | 2.56 | 2.40 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.07 | 2.03 |
| **55** | 4.02 | 3.16 | 2.77 | 2.54 | 2.38 | 2.27 | 2.18 | 2.11 | 2.06 | 2.01 |
| **60** | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 |
| **70** | 3.98 | 3.13 | 2.74 | 2.50 | 2.35 | 2.23 | 2.14 | 2.07 | 2.02 | 1.97 |
| **80** | 3.96 | 3.11 | 2.72 | 2.49 | 2.33 | 2.21 | 2.13 | 2.06 | 2.00 | 1.95 |
| **90** | 3.95 | 3.10 | 2.71 | 2.47 | 2.32 | 2.20 | 2.11 | 2.04 | 1.99 | 1.94 |
| **100** | 3.94 | 3.09 | 2.70 | 2.46 | 2.31 | 2.19 | 2.10 | 2.03 | 1.97 | 1.93 |
| **120** | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.18 | 2.09 | 2.02 | 1.96 | 1.91 |
| $\infty$ | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 |

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Квантили $F_q(k_1, k_2)$ на асиметричното $F$–разпределение на Фишер при $q = 0.95$

| $k_1 \setminus k_2$ | **12** | **15** | **20** | **24** | **30** | **40** | **60** | **120** | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 243.9 | 245.9 | 248.0 | 249.1 | 250.1 | 251.1 | 252.2 | 253.3 | 254.3 |
| **2** | 19.41 | 19.43 | 19.45 | 19.45 | 19.46 | 19.47 | 19.48 | 19.49 | 19.50 |
| **3** | 8.74 | 8.70 | 8.66 | 8.64 | 8.62 | 8.59 | 8.57 | 8.55 | 8.53 |
| **4** | 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.77 | 5.75 | 5.72 | 5.69 | 5.66 | 5.63 |
| **5** | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.53 | 4.50 | 4.46 | 4.43 | 4.40 | 4.37 |
| **6** | 4.00 | 3.94 | 3.87 | 3.84 | 3.81 | 3.77 | 3.74 | 3.70 | 3.67 |
| **7** | 3.57 | 3.51 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.34 | 3.30 | 3.27 | 3.23 |
| **8** | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.12 | 3.08 | 3.04 | 3.01 | 2.97 | 2.93 |
| **9** | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.90 | 2.86 | 2.83 | 2.79 | 2.75 | 2.71 |
| **10** | 2.91 | 2.85 | 2.77 | 2.74 | 2.70 | 2.66 | 2.62 | 2.58 | 2.54 |
| **11** | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.61 | 2.57 | 2.53 | 2.49 | 2.45 | 2.40 |
| **12** | 2.69 | 2.62 | 2.54 | 2.51 | 2.47 | 2.43 | 2.38 | 2.34 | 2.30 |
| **13** | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.25 | 2.21 |
| **14** | 2.53 | 2.46 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.13 |
| **15** | 2.48 | 2.40 | 2.33 | 2.29 | 2.25 | 2.20 | 2.16 | 2.11 | 2.07 |
| **16** | 2.42 | 2.35 | 2.28 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.01 |
| **17** | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.01 | 1.96 |
| **18** | 2.34 | 2.27 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.97 | 1.92 |
| **19** | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.88 |
| **20** | 2.28 | 2.20 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.84 |
| **21** | 2.25 | 2.18 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.81 |
| **22** | 2.23 | 2.15 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.78 |
| **23** | 2.20 | 2.13 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.76 |
| **24** | 2.18 | 2.11 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.73 |
| **25** | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 |
| **26** | 2.15 | 2.07 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.69 |
| **27** | 2.13 | 2.06 | 1.97 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.79 | 1.73 | 1.67 |
| **28** | 2.12 | 2.04 | 1.96 | 1.91 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 | 1.65 |
| **29** | 2.10 | 2.03 | 1.94 | 1.90 | 1.85 | 1.81 | 1.75 | 1.70 | 1.64 |
| **30** | 2.09 | 2.01 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.68 | 1.62 |
| **35** | 2.04 | 1.96 | 1.88 | 1.83 | 1.79 | 1.74 | 1.68 | 1.62 | 1.56 |
| **40** | 2.00 | 1.92 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.64 | 1.58 | 1.51 |
| **50** | 1.95 | 1.87 | 1.78 | 1.74 | 1.69 | 1.63 | 1.58 | 1.51 | 1.44 |
| **55** | 1.93 | 1.85 | 1.76 | 1.72 | 1.67 | 1.61 | 1.55 | 1.49 | 1.41 |
| **60** | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.70 | 1.65 | 1.59 | 1.53 | 1.47 | 1.39 |
| **70** | 1.89 | 1.81 | 1.72 | 1.67 | 1.62 | 1.57 | 1.50 | 1.44 | 1.35 |
| **80** | 1.88 | 1.79 | 1.70 | 1.65 | 1.60 | 1.54 | 1.48 | 1.41 | 1.32 |
| **90** | 1.86 | 1.78 | 1.69 | 1.64 | 1.59 | 1.53 | 1.46 | 1.39 | 1.30 |
| **100** | 1.85 | 1.77 | 1.68 | 1.63 | 1.57 | 1.52 | 1.45 | 1.38 | 1.28 |
| **120** | 1.83 | 1.75 | 1.66 | 1.61 | 1.55 | 1.50 | 1.43 | 1.35 | 1.25 |
| $\infty$ | 1.75 | 1.67 | 1.57 | 1.52 | 1.46 | 1.39 | 1.32 | 1.22 | 1.00 |





ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Квантили $F_q(k_1, k_2)$ на асиметричното $F$– разпределение на Фишер при $q = 0.975$

| $k_1 \setminus k_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 647.8 | 799.5 | 864.2 | 899.6 | 921.8 | 937.1 | 948.2 | 956.6 | 963.3 | 968.6 |
| 2 | 38.51 | 39.00 | 39.17 | 39.25 | 39.30 | 39.33 | 39.36 | 39.37 | 39.39 | 39.40 |
| 3 | 17.44 | 16.04 | 15.44 | 15.10 | 14.88 | 14.73 | 14.62 | 14.54 | 14.47 | 14.42 |
| 4 | 12.22 | 10.65 | 9.98 | 9.60 | 9.36 | 9.20 | 9.07 | 8.98 | 8.90 | 8.84 |
| 5 | 10.01 | 8.43 | 7.76 | 7.39 | 7.15 | 6.98 | 6.85 | 6.76 | 6.68 | 6.62 |
| 6 | 8.81 | 7.26 | 6.60 | 6.23 | 5.99 | 5.82 | 5.70 | 5.60 | 5.52 | 5.46 |
| 7 | 8.07 | 6.54 | 5.89 | 5.52 | 5.29 | 5.12 | 4.99 | 4.90 | 4.82 | 4.76 |
| 8 | 7.57 | 6.06 | 5.42 | 5.05 | 4.82 | 4.65 | 4.53 | 4.43 | 4.36 | 4.30 |
| 9 | 7.21 | 5.71 | 5.08 | 4.72 | 4.48 | 4.32 | 4.20 | 4.10 | 4.03 | 3.96 |
| 10 | 6.94 | 5.46 | 4.83 | 4.47 | 4.24 | 4.07 | 3.95 | 3.85 | 3.78 | 3.72 |
| 11 | 6.72 | 5.26 | 4.63 | 4.28 | 4.04 | 3.88 | 3.76 | 3.66 | 3.59 | 3.53 |
| 12 | 6.55 | 5.10 | 4.47 | 4.12 | 3.89 | 3.73 | 3.61 | 3.51 | 3.44 | 3.37 |
| 13 | 6.41 | 4.97 | 4.35 | 4.00 | 3.77 | 3.60 | 3.48 | 3.39 | 3.31 | 3.25 |
| 14 | 6.30 | 4.86 | 4.24 | 3.89 | 3.66 | 3.50 | 3.38 | 3.29 | 3.21 | 3.15 |
| 15 | 6.20 | 4.77 | 4.15 | 3.80 | 3.58 | 3.41 | 3.29 | 3.20 | 3.12 | 3.06 |
| 16 | 6.12 | 4.69 | 4.08 | 3.73 | 3.50 | 3.34 | 3.22 | 3.12 | 3.05 | 2.99 |
| 17 | 6.04 | 4.62 | 4.01 | 3.66 | 3.44 | 3.28 | 3.16 | 3.06 | 2.98 | 2.92 |
| 18 | 5.98 | 4.56 | 3.95 | 3.61 | 3.38 | 3.22 | 3.10 | 3.01 | 2.93 | 2.87 |
| 19 | 5.92 | 4.51 | 3.90 | 3.56 | 3.33 | 3.17 | 3.05 | 2.96 | 2.88 | 2.82 |
| 20 | 5.87 | 4.46 | 3.86 | 3.51 | 3.29 | 3.13 | 3.01 | 2.91 | 2.84 | 2.77 |
| 21 | 5.83 | 4.42 | 3.82 | 3.48 | 3.25 | 3.09 | 2.97 | 2.87 | 2.80 | 2.73 |
| 22 | 5.79 | 4.38 | 3.78 | 3.44 | 3.22 | 3.05 | 2.93 | 2.84 | 2.76 | 2.70 |
| 23 | 5.75 | 4.35 | 3.75 | 3.41 | 3.18 | 3.02 | 2.90 | 2.81 | 2.73 | 2.67 |
| 24 | 5.72 | 4.32 | 3.72 | 3.38 | 3.15 | 2.99 | 2.87 | 2.78 | 2.70 | 2.64 |
| 25 | 5.69 | 4.29 | 3.69 | 3.35 | 3.13 | 2.97 | 2.85 | 2.75 | 2.68 | 2.61 |
| 26 | 5.66 | 4.27 | 3.67 | 3.33 | 3.10 | 2.94 | 2.82 | 2.73 | 2.65 | 2.59 |
| 27 | 5.63 | 4.24 | 3.65 | 3.31 | 3.08 | 2.92 | 2.80 | 2.71 | 2.63 | 2.57 |
| 28 | 5.61 | 4.22 | 3.63 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.55 |
| 29 | 5.59 | 4.20 | 3.61 | 3.27 | 3.04 | 2.88 | 2.76 | 2.67 | 2.59 | 2.53 |
| 30 | 5.57 | 4.18 | 3.59 | 3.25 | 3.03 | 2.87 | 2.75 | 2.65 | 2.57 | 2.51 |
| 35 | 5.48 | 4.11 | 3.52 | 3.18 | 2.96 | 2.80 | 2.68 | 2.58 | 2.50 | 2.44 |
| 40 | 5.42 | 4.05 | 3.46 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.62 | 2.53 | 2.45 | 2.39 |
| 50 | 5.34 | 3.97 | 3.39 | 3.05 | 2.83 | 2.67 | 2.55 | 2.46 | 2.38 | 2.32 |
| 55 | 5.31 | 3.95 | 3.36 | 3.03 | 2.81 | 2.65 | 2.53 | 2.43 | 2.36 | 2.29 |
| 60 | 5.29 | 3.93 | 3.34 | 3.01 | 2.79 | 2.63 | 2.51 | 2.41 | 2.33 | 2.27 |
| 70 | 5.25 | 3.89 | 3.31 | 2.97 | 2.75 | 2.59 | 2.47 | 2.38 | 2.30 | 2.24 |
| 80 | 5.22 | 3.86 | 3.28 | 2.95 | 2.73 | 2.57 | 2.45 | 2.35 | 2.28 | 2.21 |
| 90 | 5.20 | 3.84 | 3.26 | 2.93 | 2.71 | 2.55 | 2.43 | 2.34 | 2.26 | 2.19 |
| 100 | 5.18 | 3.83 | 3.25 | 2.92 | 2.70 | 2.54 | 2.42 | 2.32 | 2.24 | 2.18 |
| 120 | 5.15 | 3.80 | 3.23 | 2.89 | 2.67 | 2.52 | 2.39 | 2.30 | 2.22 | 2.16 |
| $\infty$ | 5.02 | 3.69 | 3.12 | 2.79 | 2.57 | 2.41 | 2.29 | 2.19 | 2.11 | 2.05 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Квантили $F_q(k_1, k_2)$ на асиметричното $F$ – разпределение на Фишер при <u>$q$ = 0.975</u>

| $k_1 \setminus k_2$ | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 976.7 | 984.9 | 993.1 | 997.3 | 1001 | 1006 | 1010 | 1014 | 1018 |
| 2 | 39.41 | 39.43 | 39.45 | 39.46 | 39.46 | 39.47 | 39.48 | 39.49 | 39.50 |
| 3 | 14.34 | 14.25 | 14.17 | 14.12 | 14.08 | 14.04 | 13.99 | 13.95 | 13.90 |
| 4 | 8.75 | 8.66 | 8.56 | 8.51 | 8.46 | 8.41 | 8.36 | 8.31 | 8.26 |
| 5 | 6.52 | 6.43 | 6.33 | 6.28 | 6.23 | 6.18 | 6.12 | 6.07 | 6.02 |
| 6 | 5.37 | 5.27 | 5.17 | 5.12 | 5.07 | 5.01 | 4.96 | 4.90 | 4.85 |
| 7 | 4.67 | 4.57 | 4.47 | 4.41 | 4.36 | 4.31 | 4.25 | 4.20 | 4.14 |
| 8 | 4.20 | 4.10 | 4.00 | 3.95 | 3.89 | 3.84 | 3.78 | 3.73 | 3.67 |
| 9 | 3.87 | 3.77 | 3.67 | 3.61 | 3.56 | 3.51 | 3.45 | 3.39 | 3.33 |
| 10 | 3.62 | 3.52 | 3.42 | 3.37 | 3.31 | 3.26 | 3.20 | 3.14 | 3.08 |
| 11 | 3.43 | 3.33 | 3.23 | 3.17 | 3.12 | 3.06 | 3.00 | 2.94 | 2.88 |
| 12 | 3.28 | 3.18 | 3.07 | 3.02 | 2.96 | 2.91 | 2.85 | 2.79 | 2.73 |
| 13 | 3.15 | 3.05 | 2.95 | 2.89 | 2.84 | 2.78 | 2.72 | 2.66 | 2.60 |
| 14 | 3.05 | 2.95 | 2.84 | 2.79 | 2.73 | 2.67 | 2.61 | 2.55 | 2.49 |
| 15 | 2.96 | 2.86 | 2.76 | 2.70 | 2.64 | 2.59 | 2.52 | 2.46 | 2.40 |
| 16 | 2.89 | 2.79 | 2.68 | 2.63 | 2.57 | 2.51 | 2.45 | 2.38 | 2.32 |
| 17 | 2.82 | 2.72 | 2.62 | 2.56 | 2.50 | 2.44 | 2.38 | 2.32 | 2.25 |
| 18 | 2.77 | 2.67 | 2.56 | 2.50 | 2.44 | 2.38 | 2.32 | 2.26 | 2.19 |
| 19 | 2.72 | 2.62 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.33 | 2.27 | 2.20 | 2.13 |
| 20 | 2.68 | 2.57 | 2.46 | 2.41 | 2.35 | 2.29 | 2.22 | 2.16 | 2.09 |
| 21 | 2.64 | 2.53 | 2.42 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.18 | 2.11 | 2.04 |
| 22 | 2.60 | 2.50 | 2.39 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.14 | 2.08 | 2.00 |
| 23 | 2.57 | 2.47 | 2.36 | 2.30 | 2.24 | 2.18 | 2.11 | 2.04 | 1.97 |
| 24 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.15 | 2.08 | 2.01 | 1.94 |
| 25 | 2.51 | 2.41 | 2.30 | 2.24 | 2.18 | 2.12 | 2.05 | 1.98 | 1.91 |
| 26 | 2.49 | 2.39 | 2.28 | 2.22 | 2.16 | 2.09 | 2.03 | 1.95 | 1.88 |
| 27 | 2.47 | 2.36 | 2.25 | 2.19 | 2.13 | 2.07 | 2.00 | 1.93 | 1.85 |
| 28 | 2.45 | 2.34 | 2.23 | 2.17 | 2.11 | 2.05 | 1.98 | 1.91 | 1.83 |
| 29 | 2.43 | 2.32 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 30 | 2.41 | 2.31 | 2.20 | 2.14 | 2.07 | 2.01 | 1.94 | 1.87 | 1.79 |
| 35 | 2.34 | 2.23 | 2.12 | 2.06 | 2.00 | 1.93 | 1.86 | 1.79 | 1.70 |
| 40 | 2.29 | 2.18 | 2.07 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.80 | 1.72 | 1.64 |
| 50 | 2.22 | 2.11 | 1.99 | 1.93 | 1.87 | 1.80 | 1.72 | 1.64 | 1.55 |
| 55 | 2.19 | 2.08 | 1.97 | 1.90 | 1.84 | 1.77 | 1.69 | 1.61 | 1.51 |
| 60 | 2.17 | 2.06 | 1.94 | 1.88 | 1.82 | 1.74 | 1.67 | 1.58 | 1.48 |
| 70 | 2.14 | 2.03 | 1.91 | 1.85 | 1.78 | 1.71 | 1.63 | 1.54 | 1.44 |
| 80 | 2.11 | 2.00 | 1.88 | 1.82 | 1.75 | 1.68 | 1.60 | 1.51 | 1.40 |
| 90 | 2.09 | 1.98 | 1.86 | 1.80 | 1.73 | 1.66 | 1.58 | 1.48 | 1.37 |
| 100 | 2.08 | 1.97 | 1.85 | 1.78 | 1.71 | 1.64 | 1.56 | 1.46 | 1.35 |
| 120 | 2.05 | 1.94 | 1.82 | 1.76 | 1.69 | 1.61 | 1.53 | 1.43 | 1.31 |
| ∞ | 1.94 | 1.83 | 1.71 | 1.64 | 1.57 | 1.48 | 1.39 | 1.27 | 1.00 |





## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Квантили $F_q(k_1, k_2)$ на асиметричното $F$ – разпределение на Фишер при <u>$q$ = 0.99</u>

| $k_1 \setminus k_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4052 | 4999 | 5404 | 5624 | 5764 | 5859 | 5928 | 5981 | 6022 | 6056 |
| 2 | 98.50 | 99.00 | 99.16 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.36 | 99.38 | 99.39 | 99.40 |
| 3 | 34.12 | 30.82 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.49 | 27.34 | 27.23 |
| 4 | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.80 | 14.66 | 14.55 |
| 5 | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.46 | 10.29 | 10.16 | 10.05 |
| 6 | 13.75 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 |
| 7 | 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 |
| 8 | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.81 |
| 9 | 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 |
| 10 | 10.04 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.85 |
| 11 | 9.65 | 7.21 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 | 4.54 |
| 12 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 | 4.30 |
| 13 | 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.21 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 | 4.10 |
| 14 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.69 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3.94 |
| 15 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 |
| 16 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.69 |
| 17 | 8.40 | 6.11 | 5.19 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.59 |
| 18 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 | 3.51 |
| 19 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 |
| 20 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 |
| 21 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.64 | 3.51 | 3.40 | 3.31 |
| 22 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 |
| 23 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 | 3.21 |
| 24 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 | 3.17 |
| 25 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.85 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 | 3.13 |
| 26 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.18 | 3.09 |
| 27 | 7.68 | 5.49 | 4.60 | 4.11 | 3.78 | 3.56 | 3.39 | 3.26 | 3.15 | 3.06 |
| 28 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 | 3.03 |
| 29 | 7.60 | 5.42 | 4.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.09 | 3.00 |
| 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 |
| 35 | 7.42 | 5.27 | 4.40 | 3.91 | 3.59 | 3.37 | 3.20 | 3.07 | 2.96 | 2.88 |
| 40 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.80 |
| 50 | 7.17 | 5.06 | 4.20 | 3.72 | 3.41 | 3.19 | 3.02 | 2.89 | 2.78 | 2.70 |
| 55 | 7.12 | 5.01 | 4.16 | 3.68 | 3.37 | 3.15 | 2.98 | 2.85 | 2.75 | 2.66 |
| 60 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 |
| 70 | 7.01 | 4.92 | 4.07 | 3.60 | 3.29 | 3.07 | 2.91 | 2.78 | 2.67 | 2.59 |
| 80 | 6.96 | 4.88 | 4.04 | 3.56 | 3.26 | 3.04 | 2.87 | 2.74 | 2.64 | 2.55 |
| 90 | 6.93 | 4.85 | 4.01 | 3.53 | 3.23 | 3.01 | 2.84 | 2.72 | 2.61 | 2.52 |
| 100 | 6.90 | 4.82 | 3.98 | 3.51 | 3.21 | 2.99 | 2.82 | 2.69 | 2.59 | 2.50 |
| 120 | 6.85 | 4.79 | 3.95 | 3.48 | 3.17 | 2.96 | 2.79 | 2.66 | 2.56 | 2.47 |
| ∞ | 6.64 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.32 |

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Квантили $F_q(k_1, k_2)$ на асиметричното $F$ – разпределение на Фишер при $q = 0.99$

| $k_1 \setminus k_2$ | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6107 | 6157 | 6209 | 6234 | 6260 | 6286 | 6313 | 6340 | 6366 |
| 2 | 99.42 | 99.43 | 99.45 | 99.46 | 99.47 | 99.48 | 99.48 | 99.49 | 99.50 |
| 3 | 27.05 | 26.87 | 26.69 | 26.60 | 26.50 | 26.41 | 26.32 | 26.22 | 26.13 |
| 4 | 14.37 | 14.20 | 14.02 | 13.93 | 13.84 | 13.75 | 13.65 | 13.56 | 13.46 |
| 5 | 9.89 | 9.72 | 9.55 | 9.47 | 9.38 | 9.29 | 9.20 | 9.11 | 9.02 |
| 6 | 7.72 | 7.56 | 7.40 | 7.31 | 7.23 | 7.14 | 7.06 | 6.97 | 6.88 |
| 7 | 6.47 | 6.31 | 6.16 | 6.07 | 5.99 | 5.91 | 5.82 | 5.74 | 5.65 |
| 8 | 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.28 | 5.20 | 5.12 | 5.03 | 4.95 | 4.86 |
| 9 | 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.73 | 4.65 | 4.57 | 4.48 | 4.40 | 4.31 |
| 10 | 4.71 | 4.56 | 4.41 | 4.33 | 4.25 | 4.17 | 4.08 | 4.00 | 3.91 |
| 11 | 4.40 | 4.25 | 4.10 | 4.02 | 3.94 | 3.86 | 3.78 | 3.69 | 3.60 |
| 12 | 4.16 | 4.01 | 3.86 | 3.78 | 3.70 | 3.62 | 3.54 | 3.45 | 3.36 |
| 13 | 3.96 | 3.82 | 3.66 | 3.59 | 3.51 | 3.43 | 3.34 | 3.25 | 3.17 |
| 14 | 3.80 | 3.66 | 3.51 | 3.43 | 3.35 | 3.27 | 3.18 | 3.09 | 3.00 |
| 15 | 3.67 | 3.52 | 3.37 | 3.29 | 3.21 | 3.13 | 3.05 | 2.96 | 2.87 |
| 16 | 3.55 | 3.41 | 3.26 | 3.18 | 3.10 | 3.02 | 2.93 | 2.84 | 2.75 |
| 17 | 3.46 | 3.31 | 3.16 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.83 | 2.75 | 2.65 |
| 18 | 3.37 | 3.23 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.75 | 2.66 | 2.57 |
| 19 | 3.30 | 3.15 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.67 | 2.58 | 2.49 |
| 20 | 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.86 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.52 | 2.42 |
| 21 | 3.17 | 3.03 | 2.88 | 2.80 | 2.72 | 2.64 | 2.55 | 2.46 | 2.36 |
| 22 | 3.12 | 2.98 | 2.83 | 2.75 | 2.67 | 2.58 | 2.50 | 2.40 | 2.31 |
| 23 | 3.07 | 2.93 | 2.78 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.35 | 2.26 |
| 24 | 3.03 | 2.89 | 2.74 | 2.66 | 2.58 | 2.49 | 2.40 | 2.31 | 2.21 |
| 25 | 2.99 | 2.85 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.36 | 2.27 | 2.17 |
| 26 | 2.96 | 2.81 | 2.66 | 2.58 | 2.50 | 2.42 | 2.33 | 2.23 | 2.13 |
| 27 | 2.93 | 2.78 | 2.63 | 2.55 | 2.47 | 2.38 | 2.29 | 2.20 | 2.10 |
| 28 | 2.90 | 2.75 | 2.60 | 2.52 | 2.44 | 2.35 | 2.26 | 2.17 | 2.06 |
| 29 | 2.87 | 2.73 | 2.57 | 2.49 | 2.41 | 2.33 | 2.23 | 2.14 | 2.03 |
| 30 | 2.84 | 2.70 | 2.55 | 2.47 | 2.39 | 2.30 | 2.21 | 2.11 | 2.01 |
| 35 | 2.74 | 2.60 | 2.44 | 2.36 | 2.28 | 2.19 | 2.10 | 2.00 | 1.89 |
| 40 | 2.66 | 2.52 | 2.37 | 2.29 | 2.20 | 2.11 | 2.02 | 1.92 | 1.80 |
| 50 | 2.56 | 2.42 | 2.27 | 2.18 | 2.10 | 2.01 | 1.91 | 1.80 | 1.68 |
| 55 | 2.53 | 2.38 | 2.23 | 2.15 | 2.06 | 1.97 | 1.87 | 1.76 | 1.64 |
| 60 | 2.50 | 2.35 | 2.20 | 2.12 | 2.03 | 1.94 | 1.84 | 1.73 | 1.60 |
| 70 | 2.45 | 2.31 | 2.15 | 2.07 | 1.98 | 1.89 | 1.78 | 1.67 | 1.54 |
| 80 | 2.42 | 2.27 | 2.12 | 2.03 | 1.94 | 1.85 | 1.75 | 1.63 | 1.49 |
| 90 | 2.39 | 2.24 | 2.09 | 2.00 | 1.92 | 1.82 | 1.72 | 1.60 | 1.46 |
| 100 | 2.37 | 2.22 | 2.07 | 1.98 | 1.89 | 1.80 | 1.69 | 1.57 | 1.43 |
| 120 | 2.34 | 2.19 | 2.03 | 1.95 | 1.86 | 1.76 | 1.66 | 1.53 | 1.38 |
| ∞ | 2.18 | 2.04 | 1.88 | 1.79 | 1.70 | 1.59 | 1.47 | 1.32 | 1.00 |





## Л И Т Е Р А Т У Р А


1. Гнеденко, Б., А. Гешев. **Теория на вероятностите и математическа статистика**. Пловдив, 1994.

2. Димитров, Б., Н. Янев. **Вероятности и статистика**. Университетско издаделство “Св. Климент Охридски”, София, 1991.

3. Колев, Н. **Приложна статистика 1**. Университетско издаделство “Стопанство”, София, 1993.

4. Нончева, В., М. Дилчева, В. Кинова. **Ръководство по теория на вероятностите и статистика**. Пловдивско университетско издателство, Пловдив, 2003.

5. Стоянов, Й., И. Миразчийски, Ц. Игнатов, М. Танушев. **Ръководство по теория на вероятностите**. Университетско издаделство “Св. Климент Охридски”, София, 1991.