Юлиян Цанков   icankov@fmi.uni-sofia.bg

упр 1 Безкрайни елементи и хомогенни координати

$KOxyz \quad E_3$

$A(x_1, y_1, z_1)$

z - инцидентна

$B(x_2, y_2, z_2)$

$l \ni A, B \qquad l \begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{cases}$

$(\forall P \in l : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Параметрично уравнение на права в E_3

Общо уравнение на права в равнина:

$\boxed{l: ax + by + c = 0}$

$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2) \qquad l \ni AB \qquad l: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

равнина в E_3

$\boxed{\alpha: Ax + By + Cz + D = 0}$

$\vec{n}(A, B, C) \perp \alpha$, ако $KOxyz$ е ортонормирана

$\vec{u}(x_1, y_1, z_1) \quad KOxyz$ - ортонормирана

$\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \vec{x_1} & \vec{y_1} & \vec{z_1} \\ \vec{x_2} & \vec{y_2} & \vec{z_2} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right.$$

I Безкрайни елементи на равнина E_2^*

Нека a е права в E_2

$U_a = \{ b \mid b \parallel a$ или $b \equiv a \}$ - безкрайна точка на правата a

Ако $b \parallel a \Rightarrow U_b \equiv U_a$

ω - множеството от $\forall$ безкрайни точки в равнината те безкрайна права

$E_2^* = E_2 \cup \omega$

II Безкрайни елементи в пространството E_3^*

Нека a е права в E_3

$U_a = \{ b \mid b \parallel a$ или $b \equiv a \}$ - безкрайна точка на a

Нека α е равнина в E_3

$U_\alpha = \{ \beta \mid \beta \parallel \alpha$ или $\beta \equiv \alpha \}$ - безкрайна права на равнината α

Ω - множеството от всички безкрайни точки и всички безкрайни прави (безкр. равнина на простр)

$E_3^* = E_3 \cup \Omega$

III Хомогенни координати в E_3^*

Нека $KO\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ $(KOxyz)$ е афинна координатна система в E_3

$P(x, y, z)$ – нехомогенни координати

Деф: Хомогенни координати на т. P са $P(x, y, z, t)$

$X = \frac{x}{t} \quad Y = \frac{y}{t} \quad Z = \frac{z}{t}$

Пример: $P(3, -2, 7) \to P(3, -2, 7, 1)$
$P(6, -4, 14, 2)$

$P(x, y, z, t)$ са хом. коорд. на т. P, то и $P(kx, ky, kz, kt)$ са хом. коорд на P, $k \neq 0$

Нека l е права и $\vec{l}(A, B, C) \parallel l$ и $\vec{l} \neq \vec{0}$

Деф: $U_l(A, B, C, 0)$ – хом. коорд. на безкрайна точка

Нека т. $P(x, y, z, t) \Rightarrow$

1) Ако $t \neq 0 \Rightarrow P$ е крайна точка и $P\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)$ – нехомог. координати
2) Ако $t = 0 \Rightarrow P$ е безкрайна точка и $\forall$ права g, такава, че $g \parallel \vec{g}(x, y, z)$, че U_g съвпада с P

$(0, 0, 0, 0)$ не са координати на никоя точка

Нека $\alpha: AX + BY + CZ + D = 0$ е равнина

$\boxed{\alpha: Ax + By + Cz + Dt = 0}$ – равнина в хомог. координати

$\alpha[A, B, C, D]$ – равнина в хомогенни коорд $\neq [0, 0, 0, 0]$

Нека $P_1[x_1, y_1, z_1, t_1]$ $P_2[x_2, y_2, z_2, t_2]$

$\forall$ т. $P \in P_1P_2$

$P = \lambda P_1 + \mu P_2$ за $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ само за хом. коорд

$$P_1P_2 \begin{cases} x = \lambda x_1 + \mu x_2 \\ y = \lambda y_1 + \mu y_2 \\ z = \lambda z_1 + \mu z_2 \\ t = \lambda t_1 + \mu t_2 \end{cases}$$

Нека $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3, t_3)$

$P \in$ равн. $P_1P_2P_3$

$P = \lambda P_1 + \mu P_2 + \gamma P_3 \quad (\lambda, \mu, \gamma) \neq (0,0,0)$

$P \in (P_1, P_2 P_3)$ равнина
$$\begin{cases} x = \lambda x_1 + \mu x_2 + \gamma x_3 \\ y = \lambda y_1 + \mu y_2 + \gamma y_3 \\ z = \lambda z_1 + \mu z_2 + \gamma z_3 \\ t = \lambda t_1 + \mu t_2 + \gamma t_3 \end{cases}$$
Координатно параметрично уравнение на равн. в хом. координати

Равнината $(P_1P_2P_3)$: $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0$ общо уравнение на равн.

1 зад. Спрямо афинна координатна система в пространството са дадени точките

а) $A(2,0,1,2)$, $B(3,2,0,3)$

б) $A(4,2,-3,1)$, $B(0,4,21,0)$

в) $A(3,-2,4,0)$, $B(3,4,7,0)$

Да се намери безкрайната точка на правата AB

Реш: а) A и B са крайни точки $\Rightarrow A(1, 0, \frac{1}{2})$, $B(1, \frac{2}{3}, 0)$ в нехомогенни координати

$$\overrightarrow{AB} \begin{cases} X = 1 + \lambda(1-1) \\ Y = 0 + \lambda(\frac{2}{3} - 0) \\ Z = \frac{1}{2} + \lambda(0 - \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$\overrightarrow{AB} = (0, -\frac{2}{3}, +\frac{1}{2})$

$u_{AB} = (0, -\frac{2}{3}, +\frac{1}{2}, 0)$

! Забележка: векторите нямат хомогенни координати
а) II начин
1) $AB: P = \lambda A + \mu B$
2) $AB \cap \Omega = U_{AB}$

1) $AB: \begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = 0\cdot\lambda + 2\mu \\ z = 1\cdot\lambda + 0\cdot\mu \\ t = 2\lambda + 3\mu \end{cases}$

2) $AB \cap \Omega = U_{AB}$
$t = 0$
$\Rightarrow 2\lambda + 3\mu = 0$
$\Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}\mu$

$\Rightarrow x = -3\mu + 3\mu \;;\; y = 2\mu \;;\; z = -\frac{3}{2}\mu \;;\; z = 0$
$U_{AB} = (0, 2\mu, -\frac{3}{2}\mu, 0)$

б) A – крайна точка
B – безкрайна точка
$\Rightarrow$ AB е крайна права $\Rightarrow$ AB има безброй много крайни точки и $\exists!$ безкрайна точка $\Rightarrow$
$B(0, 4, 21, 0) \equiv U_{AB}$

в) A и B са безкрайни точки и $A \not\equiv B \Rightarrow$ AB задава единствена права
$\Rightarrow$ всяка точка $P \in AB$ е безкрайна
$P = \lambda A + \mu B$

$$\begin{cases} x = 3\lambda + 3\mu \\ y = -2\lambda + 4\mu \\ z = 4\lambda + 7\mu \\ t = 0 \end{cases}$$

$\vec{p}(3, -2, 4)$ $\vec{q}(3, 4, 7)$

Всяка равнина α – крайна, такава че $\alpha \parallel \vec{p}$ и $\alpha \parallel \vec{q}$ задава правата $AB \equiv U_\alpha$

2 зад Дадени са точките $A(2,-2,4,2)$, $B(2,1,1,1)$, $C(-3,-3,0,-1)$

Да се провери, дали A, B, C са на една права

1) права AB

2) $C \in AB$?

1) $AB \begin{cases} x = 2\lambda + 2\mu \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = 4\lambda + \mu \\ t = 2\lambda + \mu \end{cases}$

2) $\begin{cases} -3 = 2\lambda + 2\mu \\ -3 = -2\lambda + \mu \\ 0 = 4\lambda + \mu \\ -1 = 2\lambda + \mu \end{cases}$ $\mu = -4\lambda$, $-1 = -2\lambda$ $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \mu = -2$

3 зад Да се намерят общите безкрайни точки на равнините

а) $\alpha: x+y-3=0$ $\beta: 2x+3y+z-4=0$

б) $\alpha: x+2y-3z+4=0$ $\beta: 2x+4y-6z+7=0$

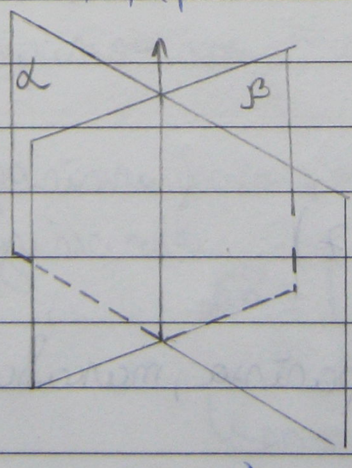
а) I начин

1) α и β са хомогенни координати

2) $\alpha \cap \beta \cap \Omega$

$\left| \begin{array}{l} x+y-3t=0 \\ 2x+3y+z-4t=0 \\ t=0 \end{array} \right.$ $\left| \begin{array}{l} x+y=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow x=-y$ $\Rightarrow y+z=0$ $\Rightarrow z=-y$

$\Rightarrow U(-y,y,-y,0) \Rightarrow U(-1,1,-1,0)$



II начин $\alpha \nparallel \beta$

$g: \left| \begin{array}{l} x+y-3=0 \\ 2x+3y-z-4=0 \end{array} \right.$

$\vec{g}(-1,1,-1) \Rightarrow U(1,-1,1,0)$

Нека $Y=\lambda \Rightarrow X = 3-\lambda$

$Z=-\lambda-2$

$g = \alpha \cap \beta$

$\Rightarrow \vec{g} \parallel g$

$\Rightarrow g: \alpha \cap \beta: \begin{cases} X = 3-\lambda \\ Y = \lambda \\ Z = -2-\lambda \end{cases}$

$\vec{g} = (-1,1,-1) \Rightarrow U = (1,-1,1,0)$

б) $\alpha: x+2y-3z+4=0$ $\beta: 2x+4y-6z+7=0$

Равнинните са успоредни. Това за първия начин няма значение

Представяме α и β в хомогенни координати и ги пресичаме с Ω

$$\left.\begin{aligned} x+2y-3z&=0 \\ t&=0 \end{aligned}\right\}$$ безкрайната права $u_\alpha \equiv u_\beta$

$\boxed{\text{4 зад}}$ $l: \begin{cases} x = 2-s \\ y = 3 \\ z = 1+2s \end{cases}$ $u_l = ?$

→ Реш:

$\vec{l}(-1,0,2) \parallel l$

$\Rightarrow u_l(-1,0,2,0)$

$$\boxed{\begin{aligned} &l: \begin{cases} \ni P_0(x_0, y_0, z_0) \\ \parallel \vec{l}(A,B,C) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow l \begin{cases} x = x_0 + s\cdot A \\ y = y_0 + s\cdot B \\ z = z_0 + s\cdot C \end{cases} \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{5 зад}}$ $a: \left| \begin{aligned} x+y-3t&=0 \\ y-2z&=0 \end{aligned} \right.$ $b: \left| \begin{aligned} 2x+4y-3z&=0 \\ 3y+z&=0 \end{aligned} \right.$

$l: \left| \begin{aligned} x+4y-z&=0 \\ 3x+4y-6z-2t&=0 \end{aligned} \right.$

а) Да се намери безкрайната трансверзала на a и b

б) (доп) Да се намери трансверзала на a и b минаваща през безкрайната точка на правата l

Реш: 1) Намираме U_a - безкрайната точка на a и U_b на b

2) Намираме правата U_aU_b

(U_aU_b: $P = \lambda U_a + \mu U_b$; P, U_a, U_b в хом коорд)

$U_a = a \cap \Omega$

$$\begin{cases} x + y - 3t = 0 \\ y - 2z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \Rightarrow x - y \\ \Rightarrow x = 2z \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow U_a(-y, y, \frac{1}{2}y, 0) \\ \Rightarrow U_a(-2, 2, 1, 0) \end{matrix}$$

$U_b = b \cap \Omega$

$z = -3y$

$2x + 4y + 9y = 0 \quad \Rightarrow U_b(-\frac{13}{2}y, y, -3y, 0)$

$x = -\frac{13}{2}y$

$\Rightarrow U_b(-13, 2, -6, 0)$

2) U_aU_b: $\begin{cases} x = -2\lambda - 13\mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = 1\lambda - 6\mu \\ t = 0 \end{cases}$

От. А.Г.

Нека $\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ } равнини

Ако $\alpha \nparallel \beta \Rightarrow \alpha \times \beta$ в права g

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$ се нарича уравн. на права, като пресечница на две равнини

Другото задаване на права е:

$g: \begin{cases} x = x_0 + sA \\ y = y_0 + sB \\ z = z_0 + sC \end{cases}$ Параметрично уравнение на права

6 зад

Да се намери безкрайната точка на правата

$$g: \begin{cases} x - 2y + 3z - 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Реш: $g \cap \Omega = U_g$

1) в хомогенни координати

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 2t = 0 \\ x + z - t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

$U_g(-z, -z, z, 0) \Rightarrow U_g(1, 1, -1, 0)$

7 зад (дом) $P(6, 0, 2)$

$$\ell: \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \alpha: 2x + 2y - 3z + 4 = 0$$

Да се намери права m, която минава през точката P, пресича ℓ и пресича безкрайната права на α

упр 2 E_2^* $M(x, y) \to M(x, y, z)$ (хомогенни координати)

Вече ще пишем вместо (x, y, t) – (x_1, x_2, x_3)

$g[a_1, a_2, a_3]$ – права, координати

$g: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

$(g: a_1x + a_2y + a_3 = 0)$

Принцип за дуалност в проективната геометрия

Разглеждаме две множества ~~от~~ елементи точки ~~нат~~ ~~пр~~ и елементи прави.

Аксиоми:

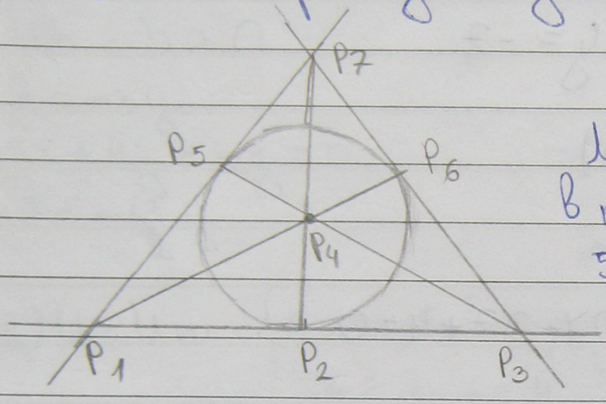
A1: Съществуват поне две различни точки.

A2: За $\forall$ две различни точки, съществува единствена права, минаваща през тях

A3: За $\forall$ права g, съществува точка C, непринадлежаща на g

A4: За $\forall$ две различни прави g и m, съществува единствена точка A, в която те се пресичат

A5: За $\forall$ права g съществуват поне 3 различни точки.



Модел на Проективна равнина, в която са изпълнени 5-те аксиоми

Принцип за дуалност в E_2^*

Нека T е твърдение за точките и правите в E_2^*, а $\tilde{T}$ е твърдение получено от T, като където пише точка (права) в T е заменено с права (точка) в $\tilde{T}$. Тогава T и $\tilde{T}$ са едновременно верни или неверни.

Твърдението за дуалност се доказва с 5-те аксиоми

Линейни трансформации в E_2^*

Def: Нека C е 3×3 матрица, такава, че $\det C \neq 0$

линейна трансформация φ в E_2^* е изображение, което на точка M съпоставя M', такова, че $CM = \rho M'$; $\rho \neq 0$

$\varphi(M) = M'$

Нека $M(x_1, x_2, x_3)$, $M'(x_1', x_2', x_3') \Rightarrow C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$

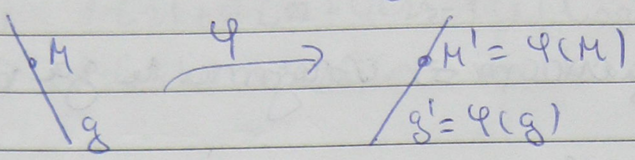
φ: права $\to$ права

$\varphi(g) = g'$

Нека $g[a_1, a_2, a_3]$ $g'[a_1', a_2', a_3']$, такова φ, че

$(a_1, a_2, a_3)\, C^{-1} = \sigma(a_1', a_2', a_3')$

Твърдение: Нека $M \in g \Rightarrow \varphi(M) \in \varphi(g)$



Деф: M е двойна (неподвижна) точка, ако $\boxed{\varphi(M) = M}$

Деф: g е двойна (неподвижна) права, ако $\boxed{\varphi(g) = g}$

$\boxed{\text{зад1}}$ Да се докаже, че за $\forall$ линейна трансф. φ $\exists$ точка M, такава, че $\varphi(M) = M$

(от принципа за дуалност $\Rightarrow$ $\exists$ права g, такава, че $\varphi(g) = g$)

Търсим т. $M(x_1, x_2, x_3)$ такава че $\varphi(M) = M$

Нека C е матрицата на лин. трансформация φ

$$C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Кога съществува $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$.

$$(C - \rho E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}\, C$ – следата на C

От $\wedge A \Rightarrow \exists (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0) \Leftrightarrow \det(C - \rho E) = 0$
$-\rho^3 + \operatorname{tr} C \rho^2 - a\rho + \det C = 0$

От това, че степента на $(\det(C - \rho E))$ е 3 $\Rightarrow$
$\exists \rho \in \mathbb{R}$, което е корен. От $\det C \neq 0 \Rightarrow \rho \neq 0$
$\Rightarrow \exists$ решение $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$

(от принципа за дуалност $\Rightarrow$ същото и за права)

Теорема: Нека A_1, B_1, D_1, Q_1 са четири точки в общо положение и A_2, B_2, D_2, Q_2 са други четири точки, също в общо положение. (Четири точки са в общо положение, ако никои три не лежат на една права) Следователно $\exists$ единствена линейна трансформация φ, такава, че $\varphi: A_1 \to A_2, B_1 \to B_2, D_1 \to D_2, Q_1 \to Q_2$ (т.е $\exists!$ матрица C 3×3 с точност до множител $\neq 0$ такава, че $\det C \neq 0$)

(дава се на пис. изпит и контролно)

$\boxed{\text{зад 2}}$ В E_2^* са дадени точките $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$
$O(0,0,1)$, $D(1,1,1)$

1) Да се намери аналитично задаване на линейната трансформация φ, т.че $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) = A$, $\varphi(O) = D$, $\varphi(D) = O$

2) Да се намерят неподвижните точки и прави на φ

3) Да се намери образът на правата Ox при φ
$(Ox: x_1 = 0,\ g: x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0)$

Реш: 1) Търсим C 3×3, такава, че да удовлетворява условието

От $\varphi(A)=B \Rightarrow CA = \rho_1 B$ | $\varphi(B)=A \Rightarrow CB = \rho_2 A$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ll} c_{11} = 0 & 1\cdot c_{11} + 0c_{12} + 0c_{13} = 0\rho_1 \\ c_{21} = \rho_1 & 1\cdot c_{21} + 0\cdot c_{22} + 0c_{23} = 1\cdot\rho_1 \\ c_{31} = 0 & 1\cdot c_{31} + 0c_{32} + 0c_{33} = 0\rho_1 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} c_{12} = \rho_2 \\ c_{22} = 0 \\ c_{32} = 0 \end{array} \right.$$

$\varphi(D)=D \Rightarrow CD = \rho_3 D$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

(от $\varphi(D)=0 \Rightarrow CD = \rho_4 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_1 & 0 & \rho_3 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left| \begin{array}{l} \rho_2 + \rho_3 = 0 \\ \rho_1 + \rho_3 = 0 \\ \rho_3 = \rho_4 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = -\rho_3 = -\rho_4$, полагаме $\rho_1 = 1$

$\Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = 1$ и $\rho_3 = -1$, $\rho_4 = -1$ $\quad C\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) Първо решаваме $CM = \lambda M$

$|C - \lambda E| = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

после търсим, т. M (x_1, x_2, x_3) такава, че

$$\boxed{(C - \lambda_i E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad i = 1, 2, 3$$

$|C - \lambda E| = 0 \quad C$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} \lambda^2(1-\lambda)+0+0-0-0-(1-\lambda)=0 \\ (1-\lambda)(\lambda^2-1)=0 \\ (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)=0 \end{array}$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 1$

Втора стъпка:

$\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = x_2$ т. $U(x_2, x_2, 0)$

$x_3 = 0$ Нека $x_1 = 1$ $\Rightarrow U(1,1,0)$

$\lambda_{2,3} = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-x_1 - x_2 + x_3 = 0$

Това е уравн. на права, т.че $\forall$ точка от нея е неподвижна (поточково неподвижна права)

Неподвижни точки:

$\lambda_1 = -1$ $U(1,1,0)$

$\lambda_{2,3} = 1$ $g: -x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$U \notin g \Rightarrow$ има права минаваща през U и пресича g

$\forall$ права m минаваща през U и пресичаща g ($\in E_2^*$) е неподвижна. От правилото за дуалност следва, че други прави няма.

Намиране на неподвижните прави (аналогичен начин)

1) Намираме C^{-1}

$(a_1, a_2, a_3)C^{-1} = \sigma(a_1, a_2, a_3)$

$\boxed{|C^{-1} - \sigma E| = 0 \Rightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$ $\boxed{\sigma_i = \frac{1}{\lambda_i}}$ от ЛА

2) търсим (a_1, a_2, a_3)

$(a_1, a_2, a_3)(C^{-1} - \nu_i E) = (0,0,0) \quad i = 1, 2, 3$

Получаване на обратна матрица

метод на Гаус $(C|E) \sim \dots \sim (E|C^{-1})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \updownarrow \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix}(-1)\\(-1)\\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{}_{E} \qquad \underbrace{}_{C^{-1}}$$

Защо $C = C^{-1}$, защото $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\varphi} A$, $B \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\varphi} B$ и т.н.

$\Rightarrow C^2 = E$, $\varphi^2 = id \Rightarrow C = C^{-1}$

От собст. с-ти на C, $\lambda_1 = -1$ $\lambda_{2,3} = 1$

$\Rightarrow \nu_1 = \frac{1}{\lambda_1} = -1$, $\nu_{2,3} = \frac{1}{\lambda_{2,3}} = 1$

$(a_1, a_2, a_3)(C^{-1} - \nu_i E) = (0,0,0)$

$\nu_1 = -1$

$$(a_1, a_2\ a_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 0) \qquad \left|\begin{array}{l} a_1 - a_2 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} a_1 = a_2 \\ a_1 = -a_3 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} m[a_1, a_1, -a_1] \\ m[1, 1, -1 \end{array}$$

(съвпада с q с точност до множител)

$r_{2,3} = 1$

$$(a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = (0\ 0\ 0) \qquad \begin{array}{|l} a_1 = -a_2 \\ a_3 = \text{произволно}\end{array}$$

$\Rightarrow n[-a_2, a_2, a_3] \Rightarrow n[-1, 1, k]$

<u>1 сл.</u> $a_3 \neq 0 \Rightarrow g[-p, p, 1] \Rightarrow -px_1 + px_2 + x_3 = 0$

<u>2 сл.</u> $a_3 = 0 \Rightarrow g[-p, p, 0] = [1, -1, 0]$

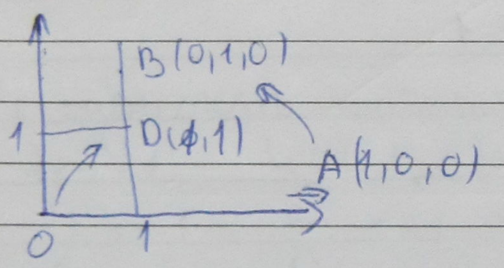
Получава се осева симетрия на равнината относно g

3) $Ox \quad x_2 = 0$

$\varphi(Ox) = ?$

Нека т. $O(0,0,1) \in Ox$ и нека т. $A(1,0,0) \in Ox$

$O \xrightarrow{\varphi} D(1,1,1)$, $A \xrightarrow{\varphi} B(0,1,0)$



$\varphi(Ox) \to P = \lambda D + \mu B$

зад. Нека $\varphi: C\begin{pmatrix}-3 & 4 & -4\\ 4 & 3 & -8\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$

Да се намерят неподвижните точки и неподвижни прави на φ

1) $|C - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda & 4 & -4\\ 4 & 3-\lambda & -8\\ 0 & 0 & 5-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$(3-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0$

$-16(5-\lambda) = 0$

$(5-\lambda)(-9+\lambda^2-16) = 0$

$$(5-\lambda)(\lambda^2-25)=0$$
$$\lambda_{1,2}=5$$
$$\lambda_3=-5$$

<u>1 сл</u> $\lambda_{1,2}=5$

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ x_3=0 \\ x_2=2x_1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow u(1,2,0)$$

$\lambda_3=-5$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cancel{2x_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+4x_2-4x_3=0 \qquad x_1=-2x_2 \\ \qquad 5x_3=0 \quad x_3=0 \qquad (-2,1,0) \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{зад за дом}}$ Като първа зад но!

$A(1,0,0)\to B$, $O(0,0,1)\to A$

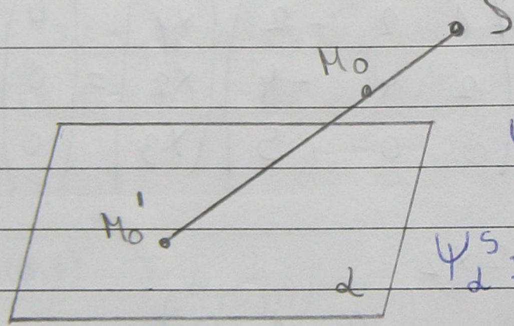
$B(0,1,0)\to O$, $D(1,1,2)\to D$

$\boxed{\text{упр 3}}$ За I контролно:

- линейни трансформации
- матрици 3×3
- неподвижни точки
- централно проектиране
- разлагане на аф. тр. на ортогонални $A = S.O$
- еднаквости в равнината
- еднаквости в пространството (за 2-ро контр)

Централно проектиране в E_3^*

Нека е дадена равнина α и т. S и $S \in \alpha$



$M_0 \notin \alpha$ и $M_0 \not\equiv S$

$\psi_\alpha^S : E_3^* \to \alpha$ $\quad M_0S \cap \alpha = M_0'$

$\psi_\alpha^S : M_0 \to M_0'$ $\quad \alpha$ – проекционна равнина

S – център

$\boxed{\text{1 зад}}$ В E_3^* е дадена равнината $\alpha: x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$

Да се намери аналитично представяне на централното проектиране с:

а) център т. $S(2, 1, 0, 1)$

б) център безкрайната точка U_b на правата $b \perp \alpha$

Реш: а) Нека т $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$

1) $M_0S: M = \lambda M_0 + \mu . S$

2.) $M_0S \cap \alpha = M_0'$ $\quad S(2,1,0,1)$

$\Rightarrow \lambda, \mu \Rightarrow C$ 4x4-матр.

$\alpha: x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$

$$M_0S = \begin{cases} x_1 = \lambda x_1^0 + \mu \cdot 2 \\ x_2 = \lambda x_2^0 + \mu \cdot 1 \\ x_3 = \lambda x_3^0 + \mu \cdot 0 \\ x_4 = \lambda x_4^0 + \mu \cdot 1 \end{cases}$$

Заместваме в α

$$\lambda x_1^0 + 2\mu - 2\lambda x_2^0 - 2\mu - 3\lambda x_3^0 + \lambda x_4^0 + \mu = 0$$

$$(x_1^0 - 2x_2^0 - 3x_3^0 + x_4^0)\lambda + \mu(2-2+1) = 0$$

$$\mu = x_1^0 - 2x_2^0 - 3x_3^0 + y_4^0$$
$$\lambda = -1$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 x_1^0 + 2(x_1^0 - 2x_2^0 - 3x_3^0 + x_4^0) \\ x_2 = -1 x_2^0 + x_1^0 - 2x_2^0 - 3x_3^0 + x_4^0 \\ x_3 = -1 x_3^0 \\ x_4 = -1 x_4^0 + x_1^0 - 2x_2^0 - 3x_3^0 + x_4^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 - 4x_2^0 - 6x_3^0 + 2x_4^0 \\ x_2 = x_1^0 - 3x_2^0 - 3x_3^0 + x_4^0 \\ x_3 = -x_3^0 \\ x_4 = x_1^0 - 2x_2^0 - 3x_3^0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ранг: $r(C) = ?$ (да се изчисли и види че е 3)

б) $\vec{n}_\alpha \perp \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \parallel b \perp \alpha$

$\vec{n}_\alpha (1,-2,-3) \perp \alpha \Rightarrow u_b = (1,-2,-3,0)$

$$M_0 M_b = \begin{cases} x_1 = \lambda x_1^0 + \mu \cdot 1 \\ x_2 = \lambda x_2^0 + \mu(-2) \\ x_3 = \lambda x_3^0 + \mu(-3) \\ x_4 = \lambda x_4^0 + \mu(0) \end{cases}$$

$$\lambda x_1^0 + \mu - 2(\lambda x_2^0 - 2\mu) - 3(\lambda x_3^0 - 3\mu) + \lambda x_4^0 = 0$$

$$\lambda x_1^0 + \mu - 2\lambda x_2^0 + 4\mu - 3\lambda x_3^0 + 9\mu + \lambda x_4^0 = 0$$

$$\lambda(x_1^0 - 2x_2^0 - 3x_3^0 + x_4^0) + \mu(1+4+9) = 0$$

$$\lambda = -14$$

$$\mu = x_1^0 - 2x_2^0 - 3x_3^0 + x_4^0$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = -14x_1^0 + x_1^0 - 2x_2^0 - 3x_3^0 + x_4^0 \\ x_2 = -14x_2^0 - 2x_1^0 + 4x_2^0 + 6x_3^0 - 2x_4^0 \\ x_3 = -14x_3^0 - 3x_1^0 + 6x_2^0 + 9x_3^0 - 3x_4^0 \\ x_4 = -14x_4^0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = -13x_1^0 - 2x_2^0 - 3x_3^0 + x_4 \\ x_2 = -2x_1^0 - 10x_2^0 + 6x_3^0 - 2x_4^0 \\ x_3 = -3x_1^0 + 6x_2^0 - 5x_3^0 - 3x_4^0 \\ x_4 = \qquad -14x_4^0 \end{array} \right. \Rightarrow C = \begin{pmatrix} -13 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & -10 & 6 & -2 \\ -3 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

Разлагане на афинна трансформация на ортогонална и дилетации

Хомологии

Деф: Линейна трансформация φ е хомология, ако $\exists$ права g, такава че за $\forall$ точка $M \in g$, $\varphi(M) = M$ (правата е поточково неподвижна)

$\Rightarrow \exists$ т. S, такава, че $\forall$ права $b \ni S$: $\varphi(b) = b$ (правата b не е поточково неподвижна) g се нарича ос, а S - център на хомологията

Ако $S \notin g \Rightarrow \varphi$ е обща хомология

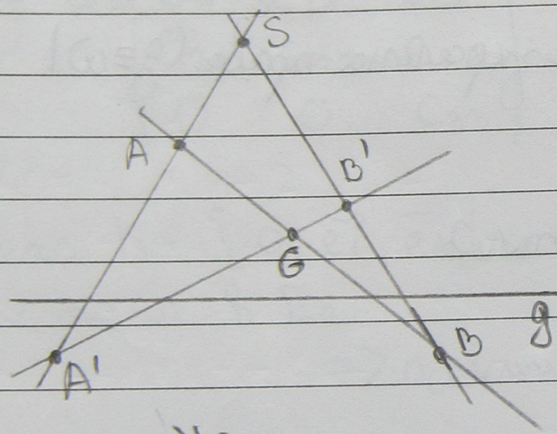
Ако $S \in g \Rightarrow \varphi$ е специална хомология

Означаваме: $\varphi(g, S)$

Нека $\varphi(B) = B' \Rightarrow BB' \ni S$

Нека $\varphi(A) = A' \Rightarrow AA' \ni g$

Една хомология φ е определена еднозначно по оста g центъра S и $\varphi: A \to A'$ (зададена точка и нейния образ) трябва $AA' \ni S$



$AB \cap g = G$

$\varphi(A) = A'$ по условие

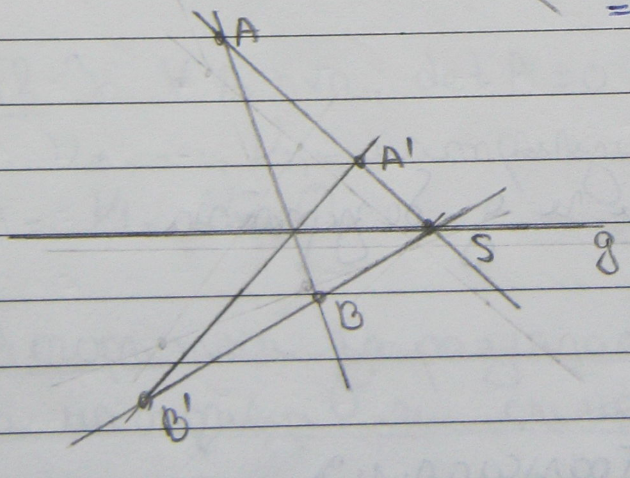
$\varphi(G) = G$

$AB = AG \xrightarrow{\varphi} \varphi(A)\varphi(G) = A'G$

$\Rightarrow B' = SB \cap A'B' = A'G$

$\varphi(AB) = A'B' = A'G$

$\Rightarrow B' \in A'G,\ B' \in SB \Rightarrow B' = SB \cap A'G$



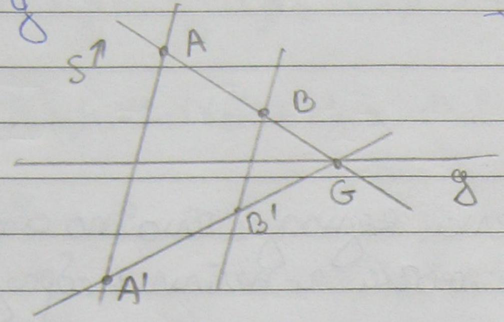
Деф: Афинна трансформация φ в E_2^* е такава, че $\varphi: \omega \to \omega$ (където ω е безкрайната права в равнината)

~~Деф: Афинна трансформация в~~

Деф Хомоложен афинитет φ е, ако φ е хомология и φ е (афинна) трансформация

Нека φ е хомоложен афинитет $\varphi(g, S)$

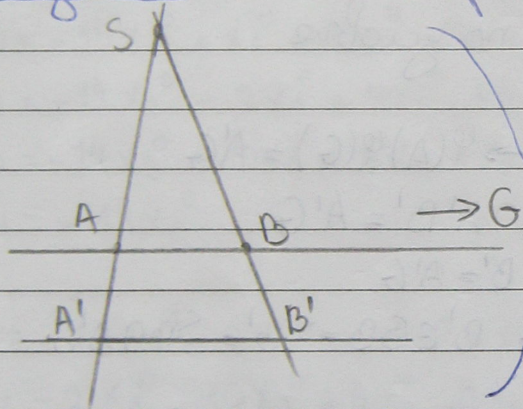
1 случай Нека g е крайна, а S е безкрайна точка и $S \notin g$



дилетация

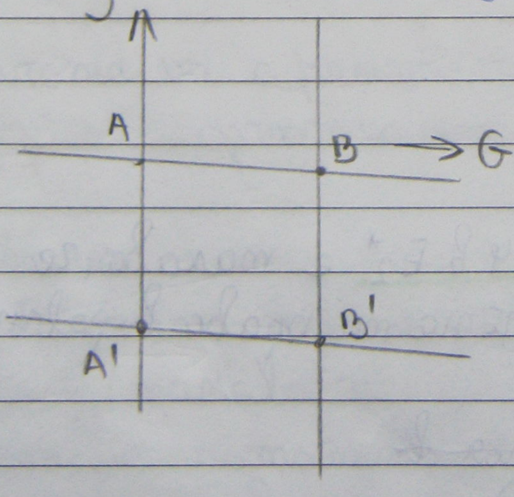
$S \parallel AA' \parallel BB'$

2 случай: Нека S - крайна, g - безкрайна права ($g \equiv \omega$)



хомотетия

3 случай: Нека S - безкрайна и g - безкрайна



Транслация

Нека φ афинна трансформация в E_2^*, нека C е 3×3 матрица на φ

Нека $M(x, y, 0) \xrightarrow{\varphi} M'(x', y', 0)$

$$\Rightarrow CM = \rho M' \Rightarrow \rho \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}\cdot 0 \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}\cdot 0 \\ 0 = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}\cdot 0 \end{cases}$$

$$0 = c_{31}x + c_{32}y \Rightarrow c_{31} = c_{32} = 0$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$$

Нека $K = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ е ортонормирана координатна система в E_2

$\Rightarrow$ афинна трансф. $\varphi \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \dots$

__Тв__ За $\forall A$ $n\times n$, $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists$ ортогонална матрица O и $V_1, \dots, V_n$ – матрици на дилетация, т.че

$A = V_1 \dots V_n \cdot O$

__Алгоритъм за разлагане на матрица A на ортогонална матрица O и симетрична матрица S ($A = S\cdot O$)__

S - симетрична $\Rightarrow S = S^T$

O - ортогонална $\Rightarrow O^{-1} = O^T$

1) $S^2 = A\cdot A^T$ (S^2 е симетрична)

ако S^2 е диагонална т.е $S^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$D_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$ са матр. на дилетациите

2) От $A = S.O$ намираме $O = S^{-1}.A$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \end{pmatrix}$$

$\boxed{1 \text{ зад}}$ $A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -2 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ на афинна трансф.

Да се представи A като $A = D_1 D_2 O$, където D_1 и D_2 са матр. на дилетации, а O е ортогонална

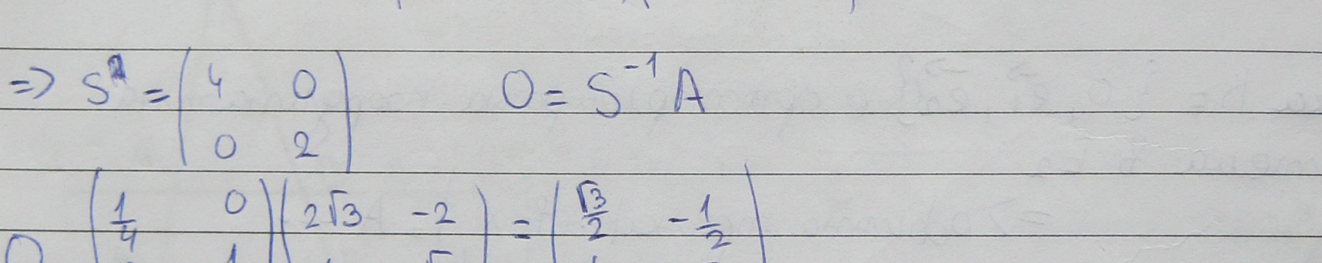
<u>Реш:</u> $S^2 = AA^T = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -2 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 1 \\ -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad O = S^{-1}A$

$$O = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -2 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$A = S.O$ $\quad S = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad O = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

От $S \Rightarrow D_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A = D_1 D_2 O$



разтяга се в едно направление

Алгоритъм за представяне на A, като SO ($A = SO$)

1) $S^2 = A \cdot A^T$

Нека S^2 не е диагонална

2) Диагонализираме S^2

2.1) $|S^2 - \lambda E| = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ (собствени стойности)

2.2) Търсим собствените вектори $\vec{V_1} = (u_1, u_2)$

за λ_1 такъв че $(S^2 - \lambda_1 E)\tilde{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V_1} = \frac{\tilde{\vec{V_1}}}{|\vec{V_1}|}$

за λ_2 търсим $\tilde{\vec{V_2}}(u_1, u_2)$

$(S^2 - \lambda_2 E)\tilde{\vec{V_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V_2} = \frac{\tilde{\vec{V_2}}}{|\vec{V_2}|}$

$$\Rightarrow B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \vec{V_1} & \vec{V_2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

3) $S'^2 = B^t \cdot S^2 \cdot B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow S' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$

$S'^2 =$

$D_1' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$ $S' = D_1' D_2'$

D_1

$A' = B^t A B \Rightarrow A' = S'O$

$\Rightarrow O' = S'^{-1} A' \Rightarrow O = BO'B^t,\ S = BS'B^t$

$(D_1 = BD_1'B^t)$

$\boxed{\text{2 зад}}$ Спрямо ортонорм. коорд. система в E_2 $K = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ е зададена афинната трансф. φ с матр. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Да се представи A като:

a) $A = SO$

б) $A = D_1 D_2 O$ – за домашно

Permi: ⓐ 1) $S^2 = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

2.1) $|S^2 - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0$$

$$40 - 8\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 9$$

2.2) $\lambda_1 = 4$ $\begin{pmatrix} 5-4 & 2 \\ 2 & 8-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} u_1 + 2u_2 = 0 \\ 2u_1 + 4u_2 = 0 \end{vmatrix}$ $u_1 = -2u_2 \Rightarrow u_2 = 1$

$\Rightarrow u_1 = -2$

$\vec{\tilde{V}}_1 = (-2, 1)$ $\vec{V}_1 = \dfrac{\vec{\tilde{V}}_1}{|\vec{\tilde{V}}_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$

$\lambda_2 = 9$ $\begin{pmatrix} 5-9 & 2 \\ 2 & 8-9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -4u_1 + 2u_2 = 0 \\ 2u_1 - u_2 = 0 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow u_2 = 2u_1$

$\Rightarrow u_1 = 1, u_2 = 2$

$\Rightarrow \vec{\tilde{V}}_2 = (1, 2)$ $\Rightarrow \vec{V}_2 = \dfrac{\vec{\tilde{V}}_2}{|\vec{\tilde{V}}_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$

$$B = \begin{vmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) $S'^2 = B^t S^2 B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow S' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

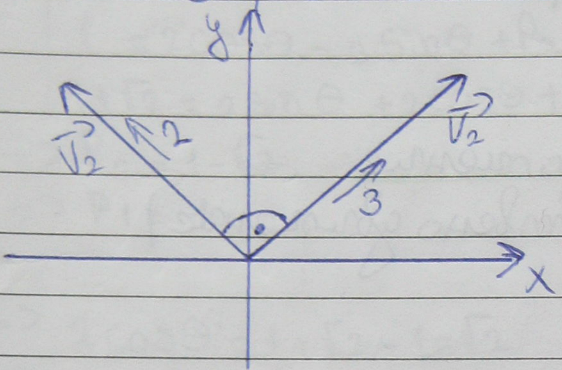
$A = SO$

$A' = S'O' \Rightarrow O' = S'^{-1} A$

$$A' = B^t A B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$O' = S'^{-1} A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}\frac{1}{5} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{5}$$

$O = B O' B^t$, $S = B S' B^t$



$$S' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{упр 4}}$

Еднаквости в равнината

Афинна трансформация спрямо $K = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ аф. к.с.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \qquad A_{2\times 2},\ \det A \neq 0$$

хомотетия се задава с матрица

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Еднаквост в равнината се задава като:

$$\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

A е ортогонална матр. $(A^{-1} = A^t$ или $AA^t = E)$

$\det A = \pm 1 \quad ((\det A)^2 = 1)$

Нека $\boxed{\det A = 1}$ => φ се нарича движение

1. Транслация $\tau_{\vec{p}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

транслацията е ротация с $\theta = 0$

2. Ротация с център S и ъгъл θ

$$\rho_S(\theta) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Нека $\boxed{\det A = -1}$

1. $\sigma_{Ox} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ - отражение (несобствено движение)

2. Плъзгащо отражение

$$\varphi = \sigma_{Ox} \cdot \tau_p = \tau_{\vec{p}} \cdot \sigma_{Ox} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{p} \parallel O_x$

(Първо отразяване, а после правим транслация)

$\boxed{1 \text{ зад}}$ Спрямо $K = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ ортонорм. коорд. сист. в E_2^*

$A(2,0)$ $B(2,2)$, $A'(1+\sqrt{2}, 1)$, $B'(1, 1+\sqrt{2})$

Да се намери движение $\varphi : A \to A'$, $B \to B'$

Реш: φ е движение => $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

$A(2,0)$, $B(2,2)$, $A'(1+\sqrt{2},1)$, $B'(1,1+\sqrt{2})$

От $A \xrightarrow{\varphi} A'$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

От $B \xrightarrow{\varphi} B'$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ll} 1+\sqrt{2} = 2\cos\theta + p_1 & \Rightarrow 2\cos\theta = 1+\sqrt{2} - p_1 \\ 1 = 2\sin\theta + p_2 & \Rightarrow 2\sin\theta = 1 - p_2 \\ 1 = 2\cos\theta - 2\sin\theta + p_2 & \Rightarrow 1 = 1+\sqrt{2} - p_1 - 1 + p_2 + p_1 \\ 1+\sqrt{2} = 2\sin\theta + 2\cos\theta + p_2 & \Rightarrow 1+\sqrt{2} = 1 - p_2 + 1 + \sqrt{2} - p_1 + p_2 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow p_2 = 1-\sqrt{2}$

$\Rightarrow p_1 = 1$

$\Rightarrow 2\cos\theta = 1+\sqrt{2}-1 = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \theta = \frac{\pi}{4}$

$$\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ако φ е еднаквост, от тук $\Rightarrow |AB| = |\varphi(A)\,\varphi(B)|$

$\boxed{\text{За домашно:}}$ Същата зад но $\varphi: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{2 зад}}$ $K = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ - ортонормирана координатна сист. в равн.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Да се докаже, че φ е ротация и да се намери центъра на ъгъла θ

1. Реш: От $\det A = 1 \Rightarrow \varphi$ е ротация и $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Нека т S е центъра на ротацията ($\varphi(S) = S$)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y &= \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}y &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right.$$

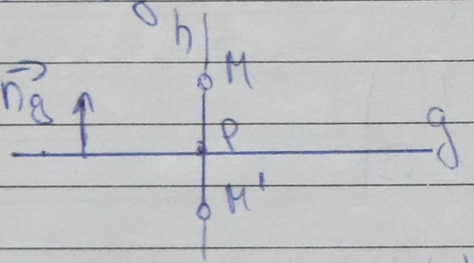
$$\left| \begin{aligned} x &= 1 - \sqrt{3}y \\ y &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow S(1,0)$$

$\boxed{\text{3 зад}}$ $K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ - ортонорм. в равн.

$g: Ax + By + C = 0$

Да се намери аналитично задаване на осевата симетрия σ_g

Реш:



1 Нека $M(x_0, y_0)$

$h: \begin{cases} \ni M(x_0, y_0) \\ \perp g \end{cases}$

2. $h \cap g = P$

3 $\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OM} + \vec{OM'})$

$\Rightarrow 2\vec{OP} - \vec{OM} = \vec{OM'}$

1. $\vec{n}_g(A,B) \perp g \Rightarrow h: \begin{cases} \ni M(x_0, y_0) \\ \parallel \vec{n}_g(A,B) \end{cases}$

$h: \begin{cases} x = x_0 + sA \\ y = y_0 + sB \end{cases}$

2. $h \cap g = P$

$\Rightarrow P: A(x_0 + sA) + B(y_0 + sB) + C = 0$

$\Rightarrow s(A^2 + B^2) = -(Ax_0 + By_0 + C)$

$\Rightarrow s = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$

$\Rightarrow x = x_0 - \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} . A$

$y = y_0 - \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} . B$

3. $\vec{OM'} = 2\vec{OP} - \vec{OM}$

Нека $M'(x', y') \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x' = 2x_0 - 2\dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} A - x_0 \\ y' = 2y_0 - 2\dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} B - y_0 \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{A^2+B^2} (A^2 x_0 + B^2 x_0 - 2A^2 x_0 - 2BAy_0 - AC) \\ y' = \dfrac{1}{A^2+B^2} (y_0 A^2 + B^2 y_0 - 2ABx_0 - 2B^2 y_0 - BC) \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{A^2+B^2} ((B^2 - A^2) x_0 - 2BAy_0 - AC) \\ y' = \dfrac{1}{A^2+B^2} ((A^2 - B^2) y_0 - 2ABx_0 - BC) \end{array} \right.$

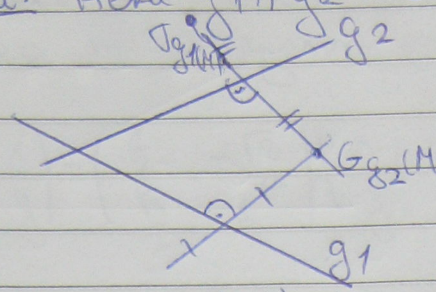
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2+B^2} \begin{pmatrix} B^2 - A^2 & -2AB \\ -2AB & A^2 - B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{C}{A^2+B^2} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{4 зад}}$ Да се докаже, че еднаквостта $\varphi = \sigma_{g1} \cdot \sigma_{g2}$ може да се представи като:

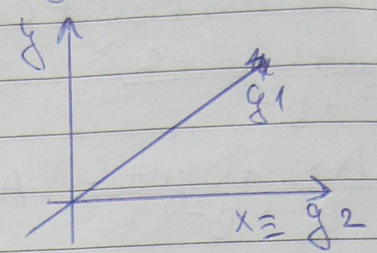
а) $g\ \rho_O(\theta)$ – ротация с център $O = g_1 \cap g_2$

б) τ_p – транслация, ако $g_1 \parallel g_2$

Реш: Нека $g_1 \cap g_2 = O$



Нека $g_2 \equiv Ox$ $g_1 \cap g_2 = O$



$$\sigma_{g_2} = \sigma_{Ox} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\sigma_{g_1} = ?$ От $g_1 \ni O(0,0) \Rightarrow C = 0 \Rightarrow g_1 : Ax + By = 0$

$$\Rightarrow \sigma_{g_1} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2+B^2}\begin{pmatrix} B^2-A^2 & -2AB \\ -2AB & A^2-B^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2+B^2}\begin{pmatrix} B^2-A^2 & -2AB \\ -2AB & A^2-B^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

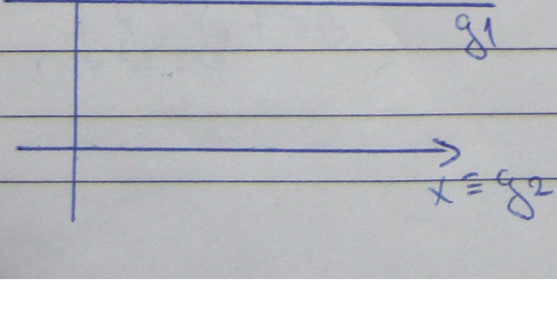
$$\Rightarrow \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2+B^2}\begin{pmatrix} B^2-A^2 & -2AB \\ 2AB & B^2-A^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\det A = \frac{1}{(A^2+B^2)^2}\left(B^4 - 2A^2B^2 + A^4 + 4A^2B^2\right) = \frac{1}{(A^2+B^2)^2}\left(A^2+B^2\right)^2 = 1$$

(свойство: $\det \lambda A = \lambda^n \cdot \det A$, ако $A_{n \times n}$)

б) $g_1 \parallel g_2$, да се док. че $\exists \vec{p} : \tau_p = \sigma_{g_1} \cdot \sigma_{g_2}$

1 Нека Oxy е ортонорм. и такава, че $Ox \equiv g_2$



$g_1 \parallel g_2$ $g_1 : y = c$

$g_1 : y - c = 0$

$g_2 : y = 0$

? $\sigma_{g_1} \cdot \sigma_{g_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

$\sigma_{g_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\sigma_{g_1} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -c \end{pmatrix}$

$\vec{p}(0, -c)$ е $\perp$ на g_1 и на g_2

$\boxed{\text{5 зад}}$ Да се док, че еднаквостта φ е композиция на транслация и отражение ($\varphi = \tau_{\vec{p}} \cdot \sigma_g$)

=> φ е или

1) плъзгащо отражение

2) осева симетрия

Решение: 1сл $\vec{p} \parallel g \Rightarrow \varphi = \tau_{\vec{p}} \cdot \sigma_g$

По деф. $\varphi = \tau_{\vec{p}} \cdot \sigma_g$ при $\vec{p} \parallel g$ е плъзгащо отражение

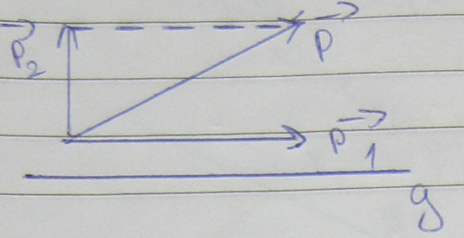
2сл. $\vec{p} \perp g$ (От зад 4 имаме, че ако $g_1 \parallel g_2$
$\Rightarrow \tau_{\vec{p}} = \sigma_{g_1} \cdot \sigma_{g_2}$ и $\vec{p} \perp g_1 \parallel g_2$

$(\sigma_g^{-1} = \sigma_g \Rightarrow \sigma_g^2 = Id$ (идентитет

Разглеждаме $\tau_{\vec{p}} = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} \mid \sigma_{g_2} = \sigma_{g_2}^{-1}$

$\sigma_{\vec{p}} = \sigma_{g_2} = \sigma_{g_1}$ - осева симетрия

3 сл. Нека $\vec{p} \nparallel g$ и $\vec{p} \not\perp g$



$\exists p_1 \parallel g$ и $p_2 \perp g$, такава че
$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$

$\tau_p = \tau_{\vec{p_1} + \vec{p_2}} = \tau_{\vec{p_1}+\vec{p_2}} = \tau_{\vec{p_1}} \circ \tau_{\vec{p_2}}$

$\tau_{\vec{p}} \circ \sigma_g = \tau_{\vec{p_1} + \vec{p_2}} \circ \sigma_g = \tau_{\vec{p}_1} \circ \tau_{p_2} \circ \sigma_g$

От $\vec{p_2} \perp g \Rightarrow \exists$ (от 2 сл.) $g_2 : \tau_2 \circ \sigma_g = \sigma_{g_2}$ и

$g_2 \parallel g \Rightarrow \tau_{\vec{p_1}} \circ \tau_{p_2} \circ \sigma_g = \tau_{p_1} \circ \sigma_{g_1}$

от $p_1 \parallel g_1 \parallel g \Rightarrow$ плъзгащо ~~изображение~~ отражение

6 зад. Да се докаже, че $\forall$ еднаквост в $\mathbb{R}^2$ може да се представи като произведение на най-много три осеви симетрии

Реш: а) $id = \sigma_g \circ \sigma_g$ – две осеви симетрии

б) $\rho_O(\theta) = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} : g_1 \cap g_2 = O$, $\angle(g_1, g_2) = \frac{1}{2}\theta$
$\Rightarrow$ три осеви симетрии

в) $\tau_{\vec{p}} = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}$ $g_1 \parallel g_2$

г) $\sigma_g = \sigma_g$

д) $\tau_{\vec{p}} \circ \sigma_g = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} \circ \sigma_g$

5 упр

Еднаквости в пространството

Нека $K = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ е ортонорм. и полож. ориентирана

$$\varphi: \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ – еднаквост

A е ортогонална

$x^* = Ax + B$ – съкратен запис

I случай: Нека $\boxed{\det A = 1}$, φ се нарича движение (собствено)

1) Транслация $\varphi = \overset{тау}{\tau_{\vec{p}}}$: $\boxed{x^* = Ex + \vec{p}}$

Неподв. точки: Няма

Неподвижни прави: $\forall g, g \parallel \vec{p}$

Неподвижни равнини: $\forall \alpha, \alpha \parallel \vec{p}$

2) Ротация $\overset{фи}{\varphi} = \overset{ро}{\rho_g}(\theta)$ $\qquad \rho_O(\theta): x^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$

Неподвижни точки: g, ~~$\forall l: l \perp g$~~ $\forall M, M \in g$

Неподвижни прави: g; $\forall l: l \perp g$

Неподвижни равнини: $\alpha: \alpha \perp g$

3) Винтово движение $\varphi = \rho_g(\theta) \circ \tau_{\vec{p}} \overset{\vec{p} \parallel g}{=} \tau_{\vec{p}} \circ \rho_g(\theta)$

Неподвижни точки: $\emptyset$

Неподвижни прави: g

Неподвижни равнини: $\emptyset$

$$\boxed{x^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix}}$$

II случай: Нека $\boxed{\det A = -1}$. Тогава φ се нарича отражение

4) Отражение спрямо равнина

Нека α е равнина: $\overset{сигма}{\sigma_\alpha}(M) = M^*$

Неподв. точки: $\forall M, M \in \alpha$

Неподвижни прави: $\forall g,\ g \in \alpha$ и $\forall h \perp \alpha$
Неподвижни равнини: $\forall \beta,\ \beta \perp \alpha$ и α

$$\sigma_{Oxy}: x^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

5.) Плъзгащо отражение: $\varphi = \sigma_\alpha \circ \tau_{\vec{p}} \overset{\vec{p} \parallel \alpha}{\underset{\text{сила}}{=}} \tau_{\vec{p}} \circ \sigma_\alpha$

Неподвижни точки: $\emptyset$
Неподвижни прави: $g,\ g \in \alpha,\ g \parallel \vec{p}$
Неподвижни равнини: α и β: $\beta \perp \alpha,\ \beta \parallel \vec{p}$

$$\boxed{x^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

6.) Въртящо отражение: $\varphi = \rho_g(\theta) \circ \sigma_\alpha \overset{g \perp \alpha}{=} \sigma_\alpha \circ \rho_g(\theta)$

Неподвижни точки: $M = g \cap \alpha$
Неподвижни прави: g
Неподвижни равнини: α

$$\sigma_{Oxy} \circ \rho_{Oz}(\theta): \boxed{x^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Смяна на координатната с-ма в пространството

$K = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ $K' = \{O', \vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'\}$

Нека $\vec{e_i}'(t_{1i}, t_{2i}, t_{3i})$ $i = 1, 2, 3$ спрямо K
$O'(x_0, y_0, z_0)$ спрямо K
$M(x, y, z)$ спрямо K, $M(x', y', z')$ спрямо K'

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} = x_0\vec{e_1} + y_0\vec{e_2} + z_0\vec{e_3} + x'\vec{e_1}' + y'\vec{e_2}' + z'\vec{e_3}'$

$x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} = x_0\vec{e_1} + y_0\vec{e_2} + z_0\vec{e_3} + x'(t_{11}\vec{e_1} + t_{21}\vec{e_2} + t_{31}\vec{e_3})$
$+ y'(t_{12}\vec{e_1} + t_{22}\vec{e_2} + t_{32}\vec{e_3}) + z'(t_{13}\vec{e_1} + t_{23}\vec{e_2} + t_{33}\vec{e_3})$

$$\begin{cases} x = x_0 + x't_{11} + y't_{12} + z't_{13} \\ y = y_0 + x't_{21} + y't_{22} + z't_{23} \\ z = z_0 + x't_{31} + y't_{32} + z't_{33} \end{cases}$$

$x = Tx' + \overrightarrow{OO'}$

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1\downarrow & e_2\downarrow & e_3\downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} \vec{e_1}' \\ \vec{e_2}' \\ \vec{e_3}' \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{pmatrix}$$

$\varphi: x^* = Ax + \vec{p}$ спрямо K
$\varphi: x'^* = A'x' + \vec{p}'$ спрямо K'

$$\left.\begin{array}{l} \text{От } x = Tx' + \overrightarrow{OO'} \\ T^{-1}x = x' + T^{-1}\overrightarrow{OO'} \\ x' = T^{-1}x - T^{-1}\overrightarrow{OO'} \end{array}\right\} \Rightarrow x'^* = T^{-1}x^* - T^{-1}\overrightarrow{OO'}$$

$\Rightarrow T^{-1}x^* - T^{-1}\overrightarrow{OO'} = A'(T^{-1}x^* - T^{-1}\overrightarrow{OO'}) + \vec{p}'$

$\Rightarrow \boxed{x^* = TA'T^{-1}x^* - TA'T^{-1}\overrightarrow{OO'} + T\vec{p}'} + \overrightarrow{OO'}$

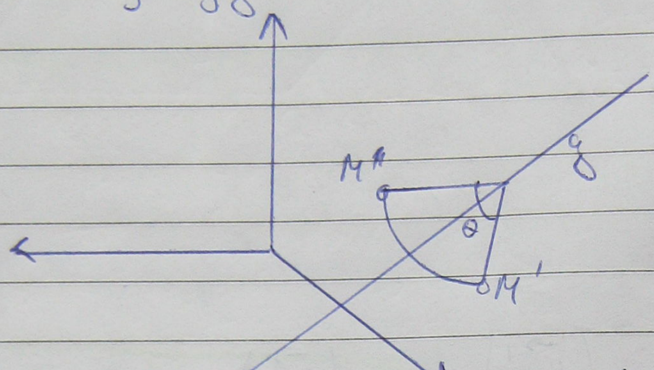
формулата ще трябва за задачите

$\boxed{1\ зад.}$ Спрямо $K = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ е дадена правата

$$g: \begin{cases} x = 2k \\ y = k \\ z = 1 - 2k \end{cases}$$

Да се намери аналитично задаване на $\rho_g(\theta)$ спрямо K. $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\rho_g(\theta) : Ox \Rightarrow ?$

Реш:



Ако $g' = O'z'$ на K'

$$\Rightarrow \rho_{O'z'}(\theta): x'^* = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A'} x'$$

спрямо K'

$O' \in g$ и $\vec{e_3}' \parallel g$

$O'(0,0,1)$ за $k=0$ спрямо K

$e_3' \parallel g$ и $|\vec{e_3}'| = 1$ $\qquad \vec{e_3}' = \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|}$ и $\vec{g} \parallel g$, $\vec{g} \neq \vec{0}$

$\vec{g}(2,1,-2)$

$|\vec{g}| = \sqrt{4+1+4} = 3 \Rightarrow \vec{e_3}' = \frac{1}{3}(2,1,-2)$

$? \ \vec{e_2}' : \vec{e_2}' \perp \vec{e_3}'$ и $|\vec{e_2}'| = 1$

$\vec{e_2}''(a,b,c)$ и от $\vec{e_2}'' \perp \vec{e_3}' \Rightarrow \vec{e_2}'' \cdot e_3' = 0$

$\Rightarrow 2a + 1b - 2c = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = c = 1$

$\Rightarrow e_2''(1,0,1) \Rightarrow \vec{e_2}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$

$\vec{e_1}' = \vec{e_2}' \times \vec{e_3}' \Rightarrow \vec{e_1}' =$

$$\vec{e_2}' \times \vec{e_3}' = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{e_1}' = \vec{e_2}' \times \vec{e_3}' = \left(-\frac{1}{3\sqrt2}, \frac{4}{3\sqrt2}, \frac{1}{3\sqrt2}\right)$$

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3\sqrt2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

K е ортогонална

$\Rightarrow T^{-1} = T^t$

$$\Rightarrow x^* = \begin{array}{c} \quad \downarrow e_1' \quad \downarrow e_2' \quad \downarrow e_3' \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3\sqrt2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt2} & \frac{4}{3\sqrt2} & \frac{1}{3\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$-TA'T^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Намираме $A, B \in Ox$, Нека $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$

$A \xrightarrow{\varphi} A^*$, $B \xrightarrow{\varphi} B^*$

$\Rightarrow Ox \rightarrow A^*B^*$

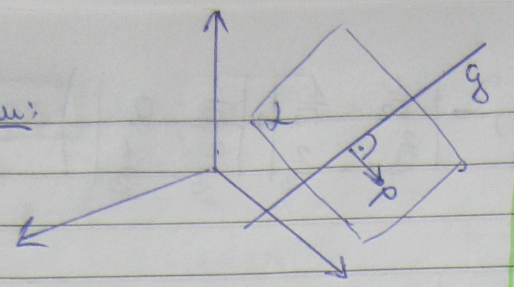
$\boxed{2 \text{ зад}}$ $K = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$

$p(1, 0, 0)$

$$g \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 2 + k \end{cases}$$

Да се намери аналитично представяне на въртящото се отражение $\varphi = \rho_g(\theta) \cdot \sigma_\alpha$, ако $\alpha \perp p$

Реш.:



Ако $\varphi = \rho_{o'z'}(\theta) \circ \Gamma_{o'x'y'}$

$$x'^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x' \text{ спрямо } K'$$

Търсим $K' = \{O, \vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}\}$

$g \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 2 + k \end{cases}$ $\quad P(1, 0, 0)$

$O' = \alpha \cap g \;,\; \vec{e_3'} \parallel g \; (g \perp \alpha)$

$\Rightarrow \vec{e_3'} = \dfrac{\vec{g}}{|\vec{g}|} \;,\; \vec{g} \parallel g$

$\vec{e_2'} \perp \vec{e_3'}$ и $|\vec{e_2'}| = 1 \Rightarrow \vec{e_2'} = \dfrac{\vec{O'P}}{|\vec{O'P}|} \Rightarrow \vec{e_1'} = \vec{e_2'} \times \vec{e_3'}$

O': 1) $\alpha \begin{cases} \ni P(1, 0, 0) \\ \perp \vec{g}(1, 0, 1) \text{ (коеф. пред параметъра)} \end{cases}$

От $\vec{g} \perp \alpha \Rightarrow \alpha: 1x + 0y + 1z + D = 0$

От $P \in \alpha \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \cancel{x + z = 0} \quad x + z - 1 = 0$

$O' = \alpha \cap g \Rightarrow (k + 2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow O'\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$

$\vec{g} = (1, 0, 1) = s\vec{e_3'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$

$\vec{O'P}\left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right) \quad |\vec{O'P}| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \vec{e_2'} = \dfrac{\vec{O'P}}{|\vec{O'P}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$

$\Rightarrow e_1' = \vec{e_2'} \times \vec{e_3'} \Rightarrow \vec{e_1'} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow e_1 = (0, -1, 0)$

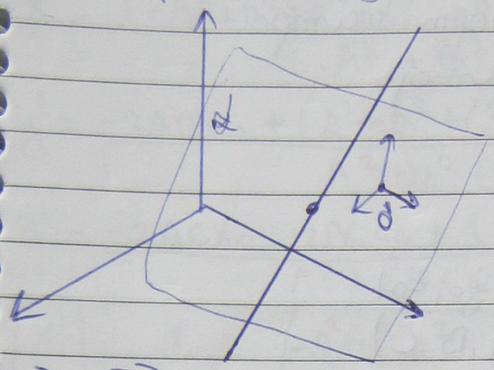
$$\Rightarrow x^* = \cancel{(0, -1, 0)} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} X -$$

$$- TA' + {}^t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3\text{ зад}}$ $к = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ (плъзгащо ~~от~~ отражение)

$\alpha: x + 2y - z + 2 = 0$

$\varphi = \tau_{\vec{p}} \circ \sigma_\alpha$, където $\tau_{\vec{p}}: P(-1,0,-1) \to O(0,0,0)$



$\varphi = \tau_{\vec{p}} \circ \sigma_{O'x'y'}$, $\vec{p} \parallel O'x'y'$

$$x'^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ 0 \end{pmatrix} \text{ спрямо } к'$$

$\vec{p} = \vec{PO} = (1,0,1)$ спрямо к

$к' = \{O', e_1', e_2', e_3'\}$, $O' \in \alpha \Rightarrow O'(0,-1,0)$ спрямо к

$$\vec{e_3'} = \frac{\vec{N_\alpha}}{|\vec{N_\alpha}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$$

<u>I начин:</u> $OP \parallel \alpha \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{e_3'}$

$\Rightarrow \vec{e_2'} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ спрямо к

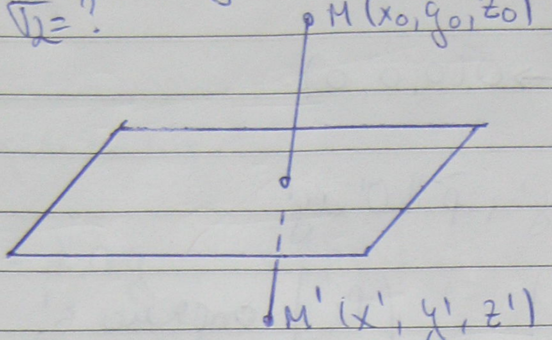
$\Rightarrow \vec{p} = |\vec{p}| \cdot \vec{e_2'} = \sqrt{2}(0,1,0)$ спрямо к'

II начин: $T\vec{p}' = \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ спрямо к

$\boxed{6\ \text{упр}}$ $\boxed{1\ \text{зад}}$ Да се намери аналитично представяне на симетрията спрямо равнина:

$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$

$\sigma_\alpha = ?$



$x^* = A'x + p$

$A'_{3\times3}$ - орт. матр

p е вектор

1) Намираме уравнение на $h: \begin{cases} \ni M(x_0, y_0, z_0) \\ \parallel \vec{N}_\alpha(A, B, C) \end{cases}$

2) $h \cap \alpha = M_0$

3) $\vec{OM'} = 2\vec{OM_0} - \vec{OM}$

1) $h: \begin{cases} x = x_0 + sA \\ y = y_0 + sB \\ z = z_0 + sC \end{cases}$

2) $h \cap \alpha = M_0$

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + (A^2 + B^2 + C^2)s = 0$

$$s = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$M_0(x_0', y_0', z_0')$

$OM' = 2(x_0', y_0', z_0') - (x_0, y_0, z_0)$

$$x_0' = x_0 - \frac{A^2x_0 + BAy_0 + CAz_0 + DA}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$y_0' = y_0 - \frac{ABx_0 + B^2y_0 + CBz_0 + DB}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$z_0' = z_0 - \frac{ACx_0 + BCy_0 + C^2z_0 + DC}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$x'_a = 2x_0 - \frac{2A^2x_0 + ABy_0 + ACz_0 + DA}{A^2 + B^2 + C^2} - x_0$$

$$y' = 2y_0 - 2\,\frac{ABx_0 + B^2y_0 + BCz_0 + DB}{A^2+B^2+C^2} - y_0$$

$$z' = 2z_0 - 2\,\frac{ACx_0 + BCy_0 + C^2z_0 + DC}{A^2+B^2+C^2} - z_0$$

$$x' = \frac{(-A^2+B^2+C^2)x_0 - 2ABy_0 - 2ACz_0 - DA}{A^2+B^2+C^2}$$

$$y' = \frac{-2ABx_0 + (A^2 - B^2 + C^2)y_0 - 2BCz_0 - 2DB}{A^2+B^2+C^2}$$

$$z' = \frac{-2ACx_0 - 2BCy_0 + (A^2+B^2+C^2)z_0 - 2DC}{A^2+B^2+C^2}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{A^2+B^2+C^2}\begin{pmatrix} -A^2+B^2+C^2 & -2AB & -2AC \\ -2AB & A^2-B^2+C^2 & -2BC \\ -2AC & -2BC & A^2+B^2-C^2 \end{pmatrix}}_{A_{3\times3}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \underbrace{- \frac{2D}{A^2+B^2+C^2}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}}_{\vec{p}}$$

$\boxed{\text{2 зад}}$ Да се докаже, че ако $\alpha \not\parallel \beta$ то

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \rho_g(\theta) : g = \alpha \cap \beta$$

<u>Реш:</u> $Oxz : y = 0$

$\forall \beta : \beta \ni Oz = ax + by = 0$

$$\sigma_{Oxz} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

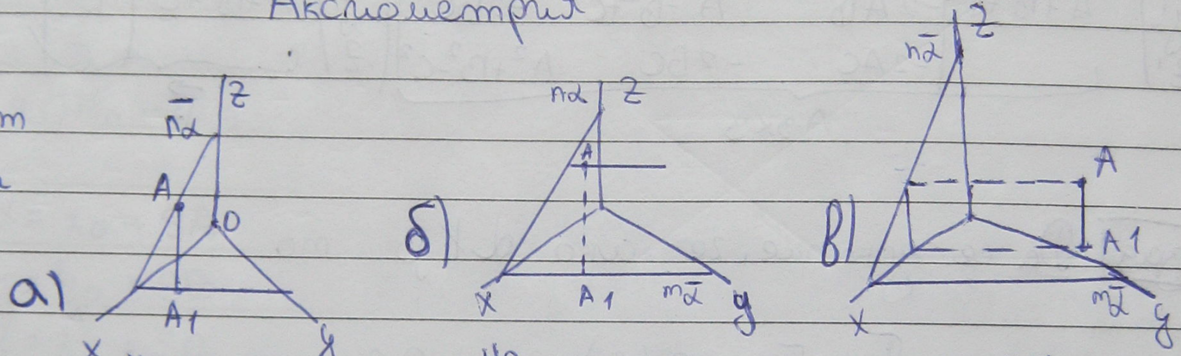
$$\sigma_\beta : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} -a^2+b^2 & -2ab & 0 \\ -2ab & a^2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_\alpha \circ \Gamma_\beta : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} -a^2+b^2 & -2ab & 0 \\ 2ab & -a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2} & 0 \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 1 \quad ---$$

Аксонометрия

въпрос от теста

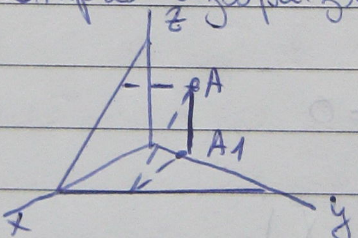


не лежи — не лежи — лежи

$\bar\alpha(m^{\bar\alpha}, n^{\bar\alpha})$

$\bar A(A, A_1)$ Коя аксонометрия изобразява $\bar A \in \bar\alpha$

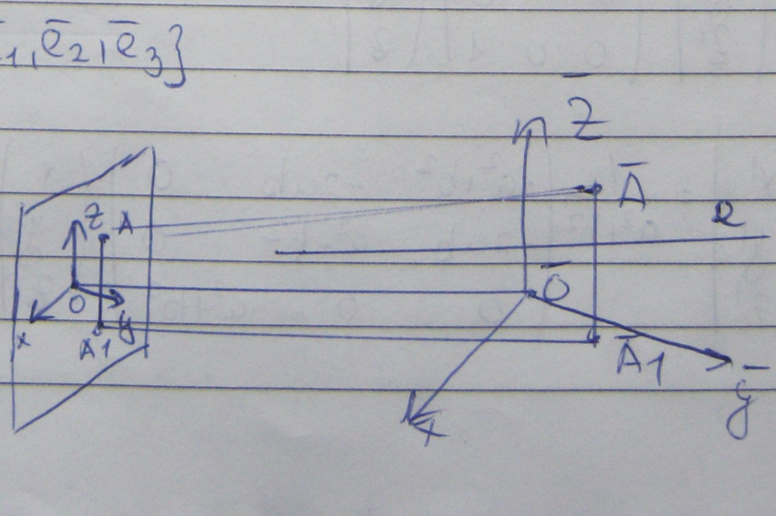
Верният отговор е в)



лежи

Π, e-права, $K = \{O, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_3\}$

$e \not\parallel \Pi$, Oxy, Oxz, Oyz



1) $\bar{\lambda} \begin{cases} \ni \bar{a} \\ \parallel e \end{cases}$

2) $\bar{\lambda} \cap \Pi = a$

3) Нека $\bar{a}$ е ортонорм. проекция на $\bar{a}$ в/у $\bar{O}\bar{e}_1\bar{e}_2$

4) $\bar{\beta}: \begin{cases} \ni \bar{a}_1 \\ \parallel e \end{cases}$

5) $\bar{\beta} \cap \Pi = a_1$

Изобразяване на права в пространството върху Π

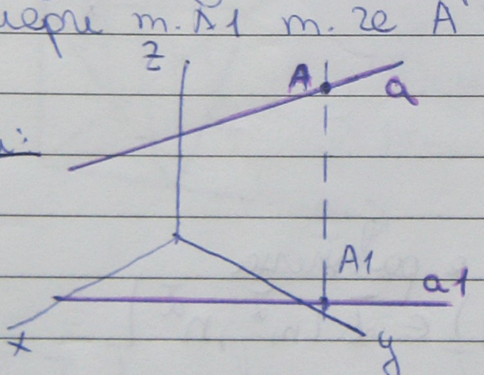
Ако $\bar{a} \in \bar{O}\bar{e}_1\bar{e}_2$ $\quad \bar{a}(a, a_1) \Leftrightarrow a \equiv a_1$

Ако $\bar{a} \parallel \ell \Leftrightarrow \bar{a} \cap \Pi =$ т. a

Ако a_1 е точка: $a_1 \in a \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{O}\bar{z}$

1 зад. Дадени са правите a и a_1 и $A \in a$. Да се намери т. A_1 т.че $\bar{A}(A, A_1) \in \bar{a}(a, a_1)$

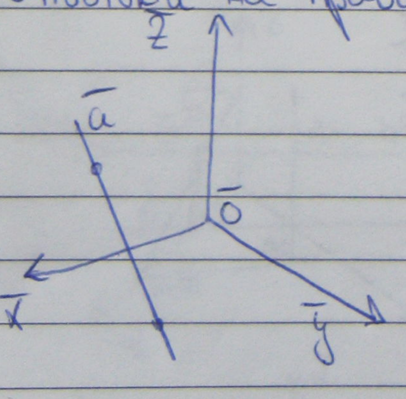
Реш:



1) Построяване $g: \begin{cases} \ni A \\ \parallel Oz \end{cases}$

2) $g \cap a_1 = A_1$

Следи на права



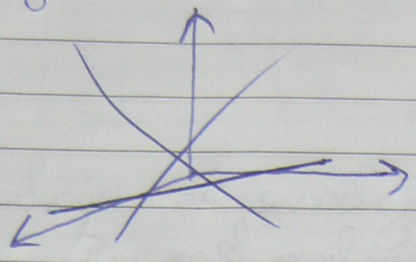
$\bar{a}$ е права в пространството

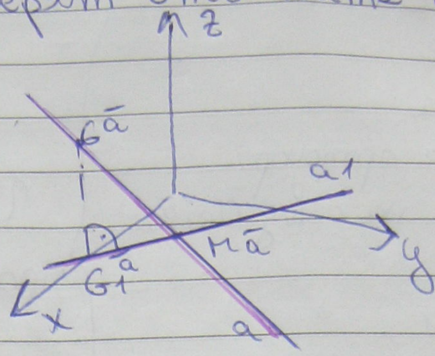
1) $\bar{a} \cap \bar{O}\bar{x}\bar{y} = \bar{M}^{\bar{a}}(M^{\bar{a}}, M_1^{\bar{a}})$

2) $\bar{a} \cap \bar{O}\bar{x}\bar{z} = \bar{G}^{\bar{a}}(G^{\bar{a}}, G_1^{\bar{a}})$

3) $\bar{a} \cap \bar{O}\bar{y}\bar{z} = \bar{P}^{\bar{a}}(P^{\bar{a}}, P_1^{\bar{a}})$

$\boxed{2\ зад}$ $\bar{a}(a, a_1)$ Да се намерят стълките на $\bar{a}$





1) $a \cap a_1 = M^{\bar{a}}$

2) $a_1 \cap O_x = G_1^{\bar{a}}$

3) $g : \begin{cases} \ni G_1^{\bar{a}} \\ \parallel O_z \end{cases}$

4) $g \cap a = G^{\bar{a}}$

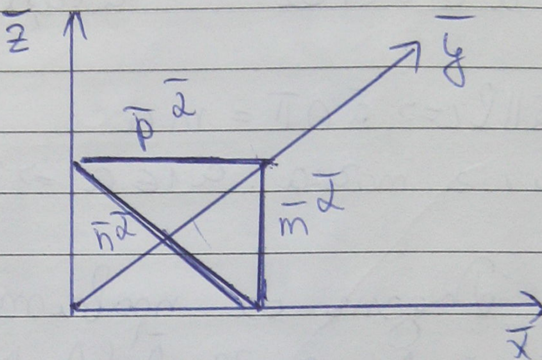
Изобразяване на равнина

Нека $\bar{\alpha}$ е равнина

$\bar{\alpha} \cap \bar{O}\bar{x}\bar{y} = \bar{m}^{\bar{\alpha}}(m^{\bar{\alpha}}, m_1^{\bar{\alpha}})$

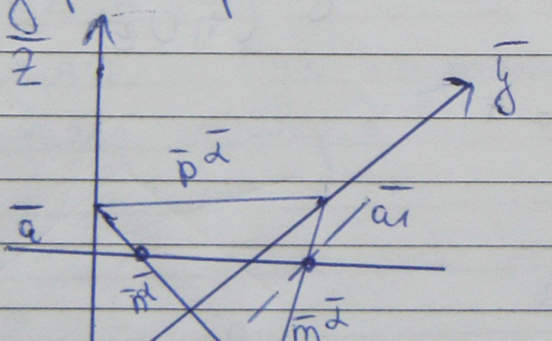
$\bar{\alpha} \cap \bar{O}\bar{x}\bar{z} = \bar{n}^{\bar{\alpha}}(n^{\bar{\alpha}}, n_1^{\bar{\alpha}})$

$\bar{\alpha} \cap \bar{O}\bar{y}\bar{z} = \bar{p}^{\bar{\alpha}}(p^{\bar{\alpha}}, p_1^{\bar{\alpha}})$



$\bar{\alpha}\underbrace{(m^{\bar{\alpha}}, n^{\bar{\alpha}})}$

дири на равнината α

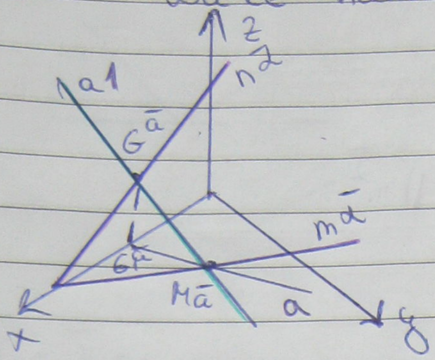


Нека $\bar{\alpha}$ е равнина

$\bar{a}(a, a_1) \in \bar{\alpha}(m^{\bar{\alpha}}, n^{\bar{\alpha}})$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} M^{\bar{a}} \in m^{\bar{\alpha}} \\ G^{\bar{a}} \in n^{\bar{\alpha}} \end{array} \right.$

3 зад. Дадена е равнина $\bar{\alpha}(m^{\bar{\alpha}}, n^{\bar{\alpha}})$ и права a_1. Да се намери правата $a: \bar{a}(a, a_1) \in \bar{\alpha}$



1) $a_1 \cap m^{\bar{\alpha}} = M^{\bar{a}}$

2) $a_1 \cap O_x = G_1^{\bar{a}}$

3) $p: \begin{cases} \ni G_1^{\bar{a}} \\ \parallel Oz \end{cases}$

4) $p \cap n^{\bar{\alpha}} = G^{\bar{a}}$

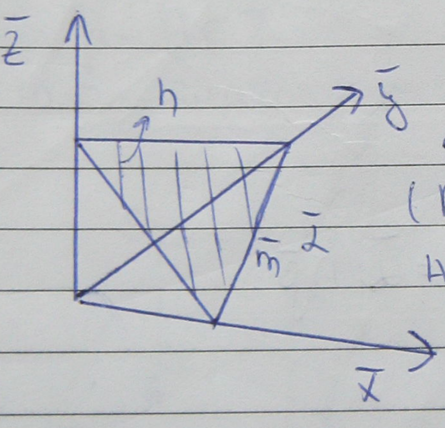
5) $a = G^{\bar{a}} M^{\bar{a}}$

(Подобно на тази задача може да има въпрос в теста)

Главни прави в равнина

Нека $\bar{\alpha}$ е равнина и $\bar{h}^{\bar{\alpha}} \begin{cases} \ni \bar{\alpha} \\ \parallel \bar{O}\bar{x}\bar{y} \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{h} \parallel \bar{m}^{\bar{\alpha}}$

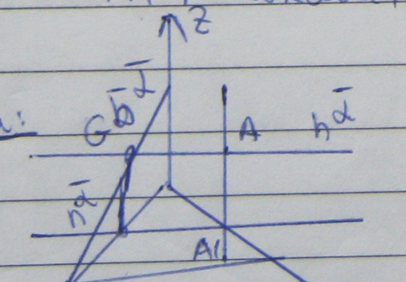


Нека $\bar{A} \in \bar{\alpha}$, построяваме през $\bar{A}$ главна права на $\bar{\alpha}$ $\bar{h}^{\bar{\alpha}}$

(Получава се картината от началото на упр.)

4 зад. $\bar{\alpha}$ - равнина, $\bar{\alpha}(m^{\bar{\alpha}}, n^{\bar{\alpha}})$ и т. A. Да се намери A_1, такава, че $\bar{A}(A, A_1) \in \bar{\alpha}$

Реш:



1) $h^{\bar{\alpha}} \begin{cases} \ni A \\ \parallel m^{\bar{\alpha}} \end{cases}$

2) $h^{\bar{\alpha}} \cap n^{\bar{\alpha}} = G^{\bar{h}^{\bar{\alpha}}}$

3) Права l: $\begin{cases} \ni G^{\bar{h}^{\bar{\alpha}}} \\ \parallel Oz \end{cases}$

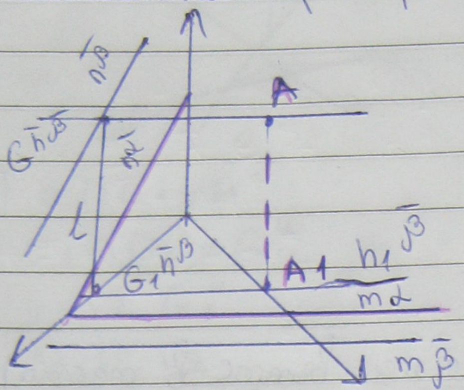
4) $l \cap O_x = G_1^{\bar{h}^{\bar{\alpha}}}$

5) $h_1^{\alpha}: \begin{cases} \ni G_1^{\bar{h}^{\bar{\alpha}}} \\ \parallel m^{\bar{\alpha}} \end{cases}$

6) $A_1 \in h_1^{\bar{\alpha}}$
$AA_1 \parallel Oz$

$\boxed{5 \text{ зад}}$ Дадени са равн. $\bar{\alpha}(m^{\bar{\alpha}}, n^{\bar{\alpha}})$ и $m\bar{A}(A, A_1)$

Да се намери равнината $\bar{\beta} \begin{cases} \parallel \bar{\alpha} \\ \ni \bar{A} \end{cases}$



1) $h_1^{\bar{\beta}} : \begin{cases} \ni A_1 \\ \parallel m^{\bar{\alpha}} \; (m^{\bar{\beta}} \parallel m^{\bar{\alpha}}) \end{cases}$

2) $h_1^{\bar{\beta}} \cap Ox = G_1^{\bar{h}\bar{\beta}}$

3) $l \begin{cases} \ni G_1^{\bar{h}\bar{\beta}} \\ \parallel Oz \end{cases}$

4) $h^{\bar{\beta}} : \begin{cases} \ni A \\ \parallel h_1^{\bar{\beta}} \end{cases}$

5) $h^{\bar{\beta}} \cap l = G^{\bar{h}\bar{\beta}}$

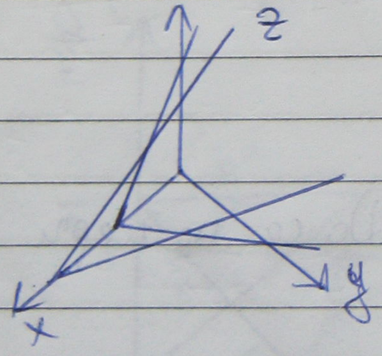
6) $n^{\bar{\beta}} : \begin{cases} \ni G^{\bar{h}\bar{\beta}} \\ \parallel n^{\bar{\alpha}} \end{cases}$

7) $n^{\bar{\beta}} \cap Ox = Q$

8) $m^{\bar{\beta}} : \begin{cases} \ni Q \\ \parallel m^{\bar{\alpha}} \end{cases}$

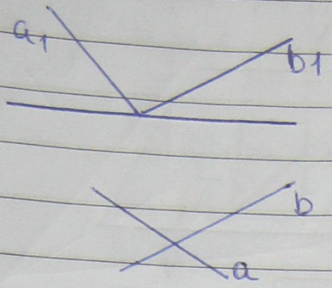
$\boxed{\text{Дом:}}$ $\bar{\alpha}(m^{\bar{\alpha}}, n^{\bar{\alpha}}), \bar{\beta}(m^{\bar{\beta}}, n^{\bar{\beta}})$

Да се намери правата $\bar{s}(s, s_1) = \bar{\alpha} \cap \bar{\beta}$

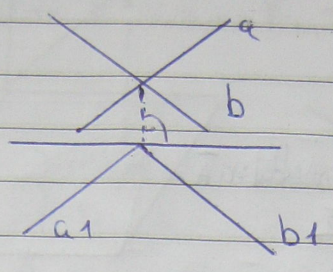


$\boxed{7 \text{ упр}}$

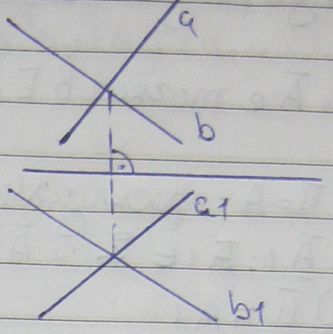
Перспектива



$\bar{a}$ и $\bar{b}$ са кръстосани



$\bar{a} \parallel \bar{b}$



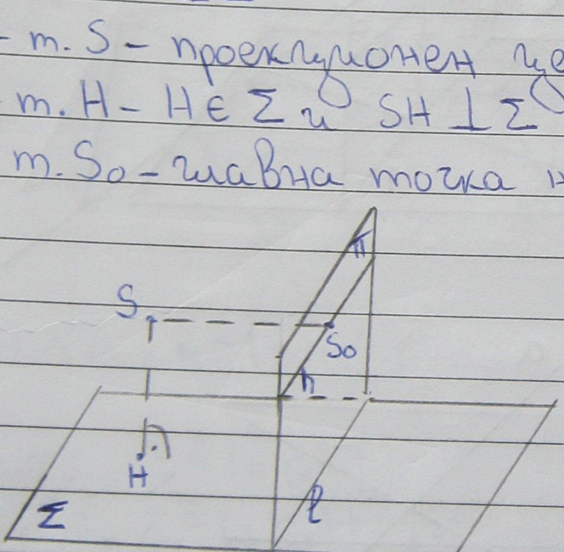
$\bar{a} \cap \bar{b} = M$ - крайна

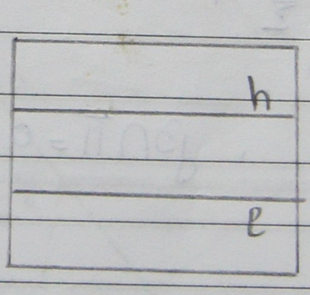
I Проекционен апарат

- равнина Π - проекционна равнина
- равнина Σ - предметна равнина

$\Pi \perp \Sigma$

- т. S - проекционен център (крайна)
- т. H - $H \in \Sigma$ и $SH \perp \Sigma$, H - точка на стоене
- т. S_0 - главна точка на картината, $SS_0 \perp \Pi$, $S_0 \in \Pi$

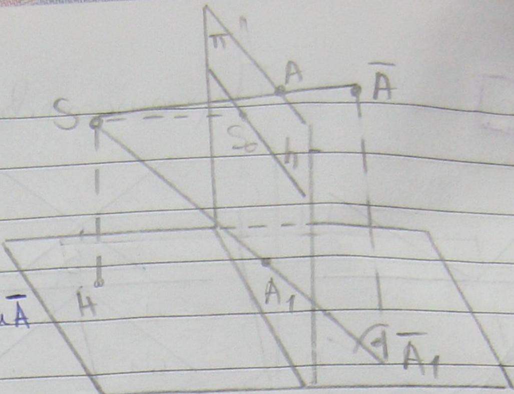




$\Pi \cap \Sigma = l$ - основа на картината

$h \parallel l$ и $h \ni S_0$ - хоризонт

1) Изобразяване на точки



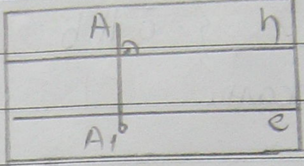
Нека $\bar{A}$ е точка в E_3^*

$\bar{A}S \cap \Pi = A$ - проекция (перспектива) на $\bar{A}$

Нека $\bar{A}_1$: $\bar{A}_1 \in \Sigma$ и $\bar{A}\bar{A}_1 \perp \Sigma$

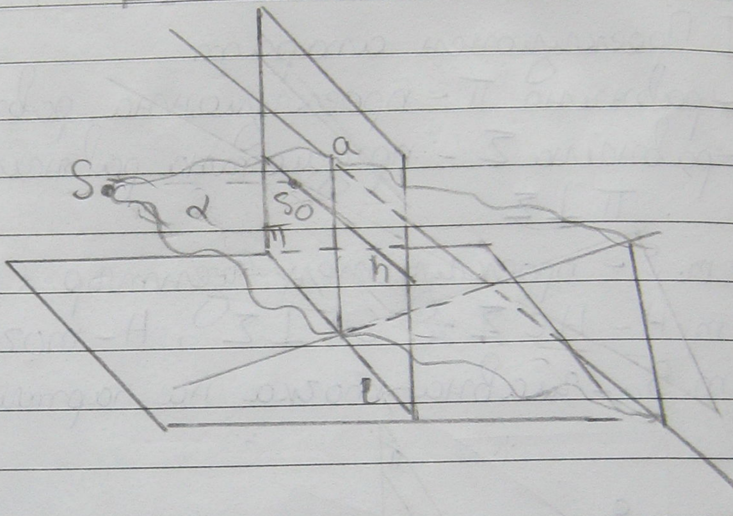
$\bar{A}_1 S \cap \Pi = A_1$

$A \equiv A_1 \Leftrightarrow \bar{A} \in \Sigma$



2) Изобразяване на права

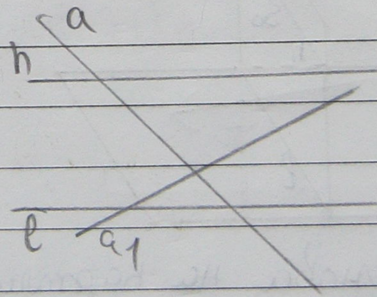
Нека $\bar{a}$ е права в E_3^*



$\bar{\alpha}: \begin{cases} \ni \bar{a} \\ \ni S \end{cases}$

$\bar{\alpha} \cap \Pi = a$

Нека $\bar{a}_1$ е ортонорм. проекция в/у Σ



Нека $\bar{\beta} \begin{cases} \ni \bar{a}_1 \\ \ni S \end{cases}$, $\beta \cap \Pi = a_1$

$\bar{a}(a, a_1)$

Ако $\bar{a} \in \Sigma \Leftrightarrow a \equiv a_1$ $(\bar{a} \equiv \bar{a}_1)$

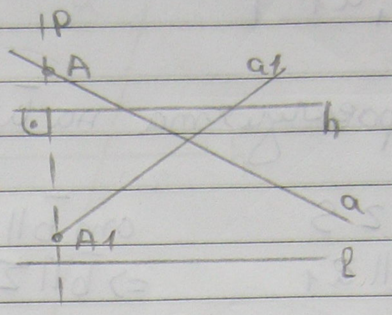
доп.: 1) Ако $\bar{a} \perp \Sigma$, как ще бъдат разпределени a и a_1?

2) Ако $\bar{a} \ni S$, —‖— ?

3) Ако $\bar{a} \in \Sigma$, —‖—

зад 1. Дадени са т. A_1 и права a и права a_1. Да се намери т. A, такава, че $\bar{A}(A, A_1) \in \bar{a}(a, a_1)$

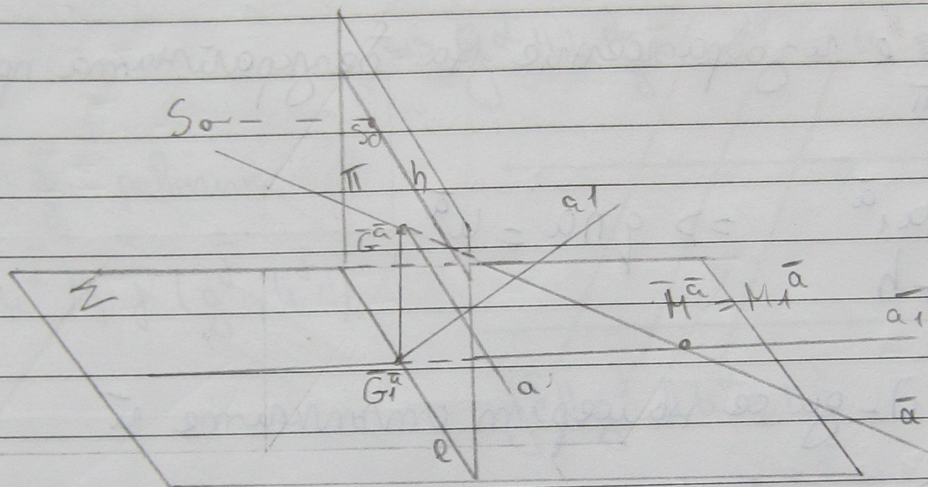
т. $A_1 \in a_1$



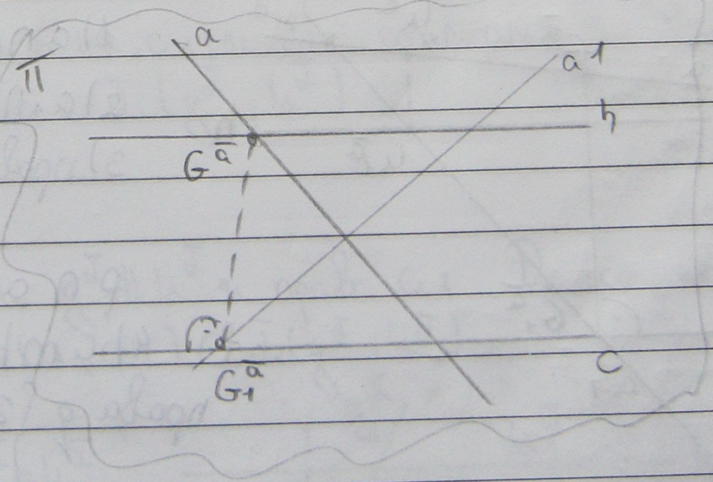
Реш: 1) Правата $p: \begin{cases} p \ni A_1 \\ p \perp h \end{cases}$

2) $p \cap a = A$

Стъпки на права



$\bar{a} \cap \Sigma = \bar{M}^{\bar{a}} (\equiv \bar{M}_1^{\bar{a}})$



$\bar{a} \cap \overline{\Pi} = \bar{G}^{\bar{a}} (\equiv G^{\bar{a}})$

$a_1 \cap \overline{\Pi} = \bar{G}_1^{\bar{a}} (\equiv G_1^{\bar{a}})$

$\bar{G}^{\bar{a}}(G^{\bar{a}}, G_1^{\bar{a}}) = \bar{a} \cap \overline{\Pi}$

$a \cap a_1 = M^{\bar{a}} \equiv M_1^{\bar{a}} (M^{\bar{a}} \in \Sigma)$

1) $a_1 \cap l = G_1^{\bar{a}}$

2) права $p \begin{cases} \ni G_1^{\bar{a}} \\ \perp l \end{cases}$

3) $p \cap a = G^{\bar{a}}$

$\bar{a} \cap \Omega = \bar{u}^{\bar{a}}$ - убежна точка (безкр. точка на пр. a)

$\bar{u}^{\bar{a}} (u^{\bar{a}}, u_1^{\bar{a}})$

$u_1^{\bar{a}}$ е проекцията на $\bar{u}_1^{\bar{a}}$ (∞ точка на $\bar{a}_1$)

Нека $\bar{b} \begin{cases} \ni S \\ \parallel \bar{a}_1 \end{cases}$ от $\bar{b} \parallel \bar{a}_1$ и $\bar{a}_1 \in \Sigma$ $\Rightarrow \bar{b} \parallel \Sigma$ и $\bar{b} \cap h = u_1^{\bar{a}}$

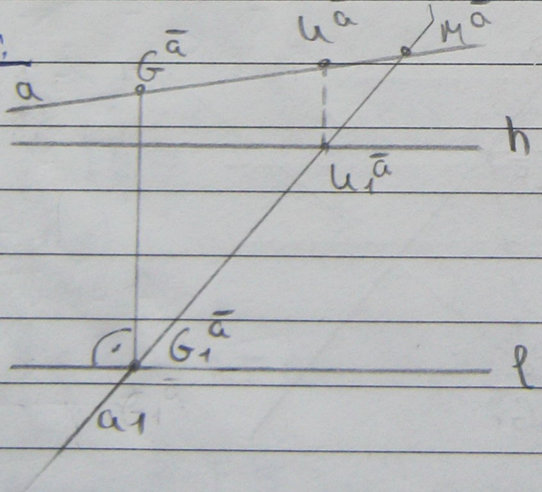
$\Rightarrow \boxed{a_1 \cap h = u_1^{\bar{a}}}$

Хоризонтът е изображение на безкрайната права на Σ върху π

Права $q \begin{cases} \ni u_1^{\bar{a}} \\ \perp h \end{cases}$ $\Rightarrow q \cap a = u^{\bar{a}}$

$\boxed{\text{Зад 2}}$ $\bar{a}(a, a_1)$ - да се намерят следите ѝ

Реш:



1) $a \cap a_1 = M^{\bar{a}}$

2) $a_1 \cap \ell = G_1^{\bar{a}}$

3) права $p \begin{cases} \ni G_1^{\bar{a}} \\ \perp \ell \end{cases}$

$p \cap a = G^{\bar{a}}$

4) $a_1 \cap h = u_1^{\bar{a}}$

права $q \begin{cases} \ni u_1^{\bar{a}} \\ \perp h \end{cases}$

$q \cap a = u^{\bar{a}}$

3) Изобразяване на равнина

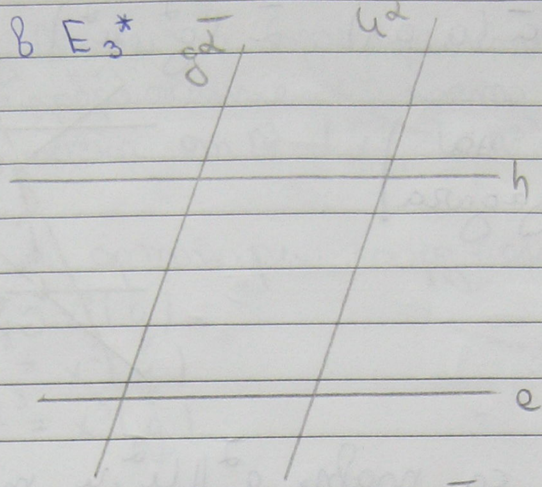
Нека $\bar{\alpha}$ е равнина в E_3^*

$\bar{\alpha} \cap \pi = g^{\bar{\alpha}}$

$\bar{\beta} \begin{cases} \ni S \\ \parallel \bar{\alpha} \end{cases}$

$\bar{\beta} \cap \pi = u^{\bar{\alpha}}$

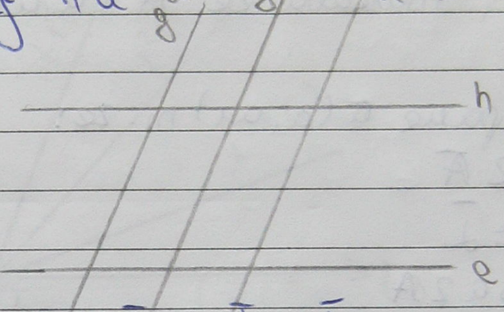
$\bar{\alpha}(g^{\bar{\alpha}}, u^{\bar{\alpha}})$



$\Rightarrow g^{\bar{\alpha}} \parallel u^{\bar{\alpha}}$

Ако $\bar{\alpha} \parallel \bar{\gamma}$ - равнина

$\bar{\alpha}(g^{\bar{\alpha}}, u^{\bar{\alpha}}),\ \bar{\gamma}(g^{\bar{\gamma}}, u^{\bar{\gamma}})$



$g^{\bar{\alpha}} \parallel g^{\bar{\gamma}} \parallel u^{\bar{\alpha}} \equiv u^{\bar{\gamma}}$

Твърдение: Нека правата $\bar{a}(a, a_1)$ и със стъпки $M^{\bar{a}}, G^{\bar{a}}, U^{\bar{a}}$ и $\bar{a} \in \bar{\alpha}(g^{\bar{\alpha}}, u^{\bar{\alpha}})$
$\Leftrightarrow G^{\bar{a}} \in g^{\bar{\alpha}}$ и $U^{\bar{a}} \in u^{\bar{\alpha}}$

Зад 3| Дадени са прави $g^{\bar{\alpha}} \parallel u^{\bar{\alpha}}$ и права a_1. Да се намери права a, такава, че $\bar{a}(a, a_1) \in \bar{\alpha}(g^{\bar{\alpha}}, u^{\bar{\alpha}})$

Реш: 1) $a_1 \cap \ell = G_1^{\bar{a}}$

2) права $p \begin{cases} \ni G_1^{\bar{a}} \\ \perp \ell \end{cases}$

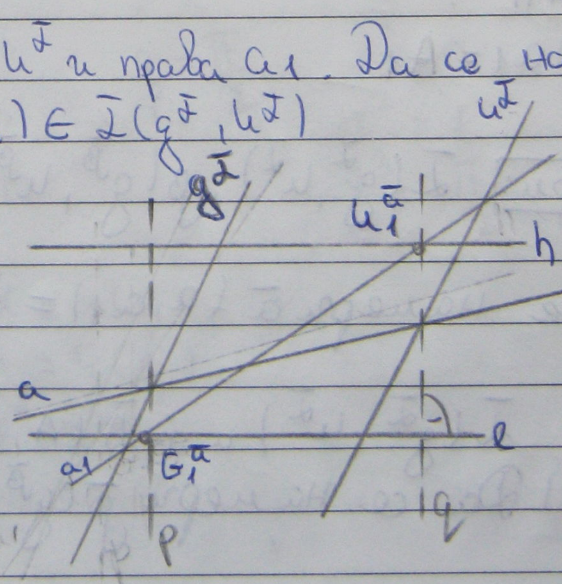
3) $p \cap g^{\bar{\alpha}} = G^{\bar{a}}$

4) $a_1 \cap h = U^{\bar{a}}$

5) $q \begin{cases} \ni U_1^{\bar{a}} \\ \perp h \end{cases}$

6) $q \cap u^{\bar{\alpha}} = U^{\bar{a}}$

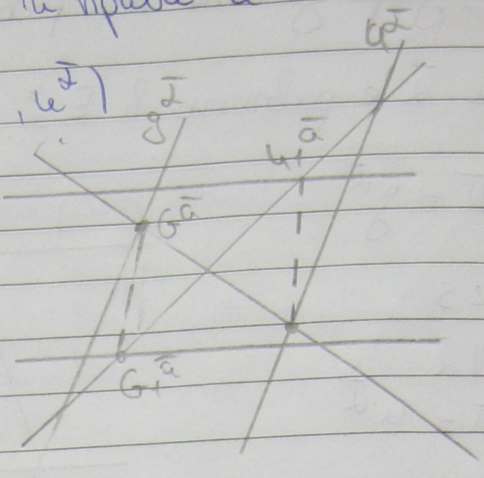
7) $a = G^{\bar{a}} U^{\bar{a}}$



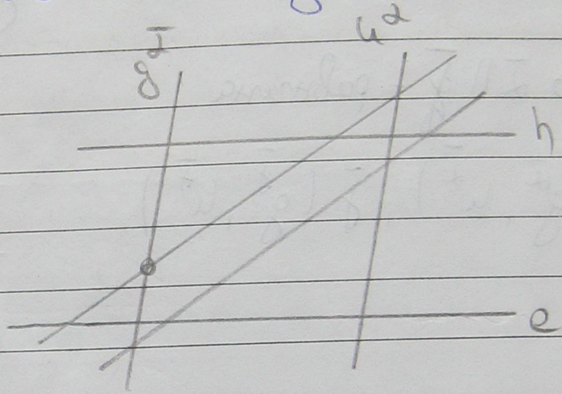
зад 4 Дадени са $g^{\bar\alpha}, h^{\bar\alpha}$ ($g^{\bar\alpha} \| h^{\bar\alpha}$) и права a. Да се намери a_1

$\bar a(a, a_1)$, $\bar\alpha(g^{\bar\alpha}, h^{\bar\alpha})$

(аналогично на предната задача)



зад 5 Дадени са прави $g^{\bar\alpha} \| h^{\bar\alpha}$ и т. A. Да се намери т. A_1, такава че $\bar A(a, a_1) \in \bar\alpha$ $\quad \bar\alpha(g^{\bar\alpha}, h^{\bar\alpha})$



Реш: Намираме $\bar a(a, a_1)$ т.че:

1.1) $\bar a \ni \bar A$

1.2) $\bar a \in \bar\alpha$

От $\bar a \ni \bar A \Rightarrow a \ni A$

a_1: $\bar a(a, a_1) \in \bar\alpha$ (зад 4)

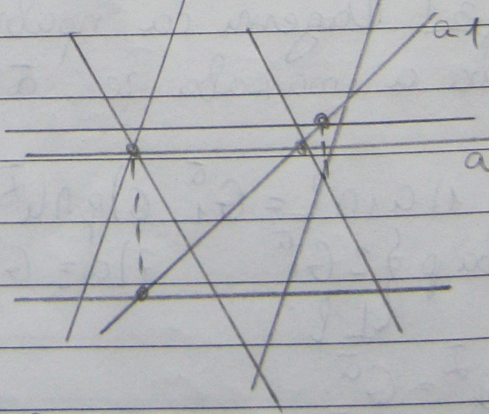
1) $a \cap g^{\bar\alpha} = G^{\bar a} \to G_1^{\bar a} \in l$

2) $a \cap h^{\bar\alpha} = H^{\bar a} \to H_1^{\bar a} \in h$

3) $a_1 \equiv G_1^{\bar a} H_1^{\bar a}$

4) $p \begin{cases} \ni A \\ \perp h \end{cases}$

5) $p \cap a_1 = A_1$



за дом: $\bar\alpha(g^{\alpha}, h^{\alpha})$, $\bar\beta(g^{\beta}, h^{\beta})$

Да се намери $\bar a(a, a_1) = \bar\alpha \cap \bar\beta$

зад 6 $\bar\alpha(g^{\alpha}, h^{\alpha})$ и т $\bar A(A, A_1)$

(за дом) Да се намери $\bar\beta(g^{\bar\beta}, h^{\bar\beta})$ $\begin{cases} \ni \bar A \\ \| \bar\alpha \end{cases}$

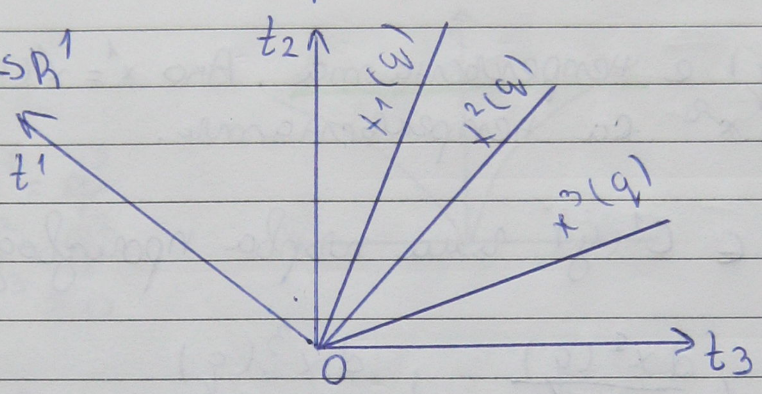
$\boxed{8 \text{ упр}}$ **Линия в пространството:**

Деф: Нека $J \in \mathbb{R}$. Линия в пространството наричаме непрекъснатото изображение x което на всяка от J съпоставя точка от $\mathbb{R}^3$ $(\vec{x}, J \subset \mathbb{R}^{3*})$

Нека $K\ O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е ортонорм. коорд. система

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{x}(q) \begin{cases} x^1 = x^1(q) \\ x^2 = x^2(q) \\ x^3 = x^3(q) \end{cases}$$

$x^1 = x^1(q) : J \to \mathbb{R}^1$



$C: \bar{x} = \bar{x}(q)$

$\to$ линия

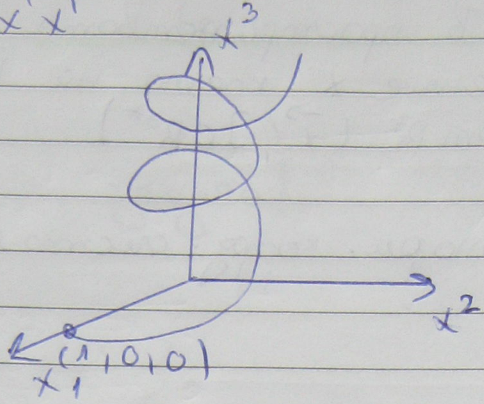
Пример: $C: \vec{x} = \vec{x}(q) \begin{cases} x^1 = a\cos q \\ x^2 = a\ln q \\ x^3 = bq \end{cases}, \quad q \in (-\infty, +\infty)$

$C: \begin{cases} x^1 = \cos q \\ x^2 = \sin q \\ x^3 = q \end{cases}$ $\quad q = 0 \quad \begin{matrix} x^1 = 1 \\ x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \end{matrix} \quad q = \frac{\pi}{2} \quad \begin{matrix} x^1 = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^3 = \frac{\pi}{2} \end{matrix}$

$C: \begin{cases} x^1 = x^1(q) \\ x^2 = x^2(q) \\ x^3 = x^3(q) \end{cases} \quad \Big| \quad C: \begin{cases} x = x(q) \\ y = y(q) \\ z = z(q) \end{cases}$

$\vec{x}(q) = x^1\vec{e_1} + x^2\vec{e_2} + x^3\vec{e_3} = x^1\vec{e}_1$

$(x^1)^2 = x^1x^1$



Деф: $\vec{x} = \vec{x}(q)$ е непрекъсната. Ако $x^1 = x^1(q), x^2 = x^2(q), x^3 = x^3(q)$, $\cancel{x^2}$ са непрекъснати.

$C: \vec{x} = \vec{x}(q) \in C^1(q)$ има първа производна, ако

$\exists \dfrac{dx^1(q)}{dq}, \dfrac{dx^2(q)}{dq}, \dfrac{dx^3(q)}{dq}$

$\dfrac{dx^i(q)}{dq} = \dot{x}^i(q) = \dot{x}^i \quad i = 1,2,3$

$\dfrac{d\vec{x}}{dq} = \dot{\vec{x}} = \dot{x}^1\vec{e_1} + \dot{x}^2\vec{e_2} + \dot{x}^3\vec{e_3}$

$\dot{\vec{x}}(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$

Пример: $\vec{x}: \begin{cases} x^1 = \cos q \\ x^2 = \sin q \\ x^3 = \ln q \end{cases}$

$\dot{\vec{x}}\left(-\sin q, \cos q, \frac{1}{q}\right)$

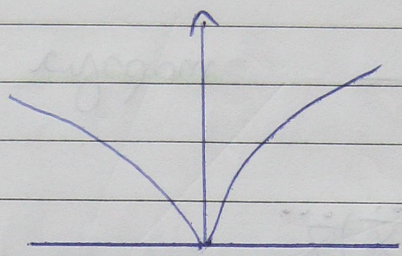
$$\frac{d^2\vec{x}}{dq^2} = \ddot{\vec{x}} = \ddot{x}^1\vec{e}_1 + \ddot{x}^2\vec{e}_2 + \ddot{x}^3\vec{e}_3$$

$c: \vec{x} = \vec{x}(q) \in C^n(J)$, ако $\exists \ \dfrac{d^n\vec{x}}{dq^n} = (x^1)^{(n)}(q) + (x^2)^{(n)}(q) + (x^3$

Деф: $c: \vec{x} = \vec{x}(q)$ се нарича n-кратно гладка, ако

1) ако $\exists \ \dfrac{d^n\vec{x}}{dq}$ (да има n-та производна)

2) $\dfrac{d\vec{x}}{dq} = \dot{\vec{x}} \neq \vec{0}$

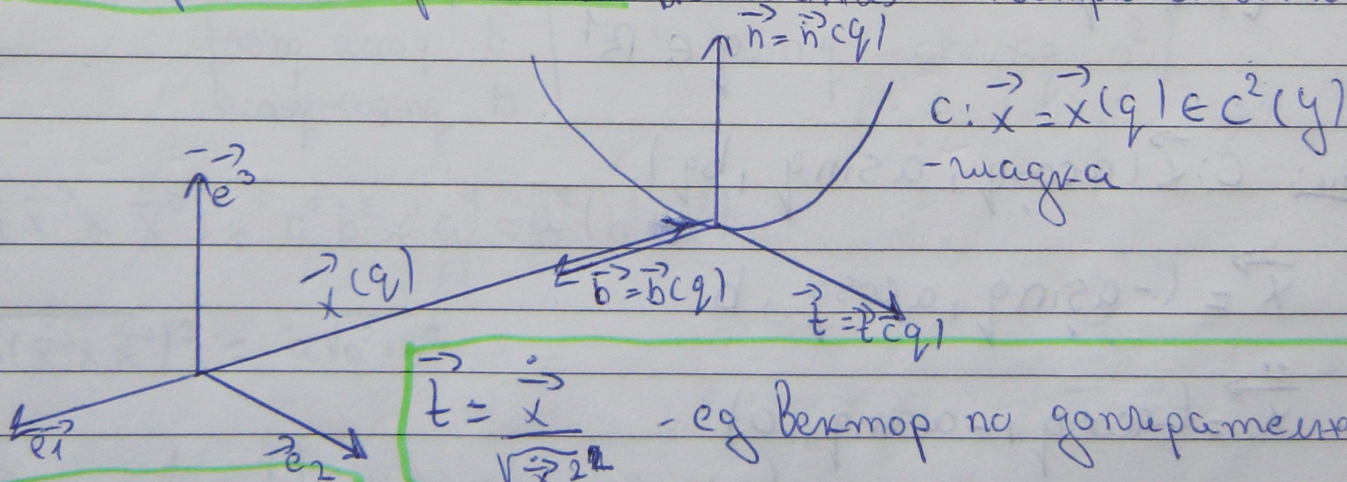


Пример: $x^1 = q^3$
$x^2 = q^2$
$x^3 = 0$

$\dot{\vec{x}}(3q^2, 2q, 0)$

$\dot{\vec{x}}(0) = (0,0,0) \Rightarrow \vec{x}$ не е гладка $-q \Rightarrow$

Векторни инварианти на линия в пространството



$\vec{t} = \dfrac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}}$ - ед вектор по допирателната

$\vec{b} = \dfrac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{\sqrt{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}}$ - единичен вектор по бинормалата

$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$ - единичен вектор по гл. нормала

Скаларни инварианти на линия в пространството

$\vec{x} = \vec{x}(q) \in C^3(J)$

1. $s = s(q) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{(\dot{\vec{x}}(q))^2}\, dq$ естествен параметър

2. $\varkappa = \dfrac{\sqrt{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}}{(\sqrt{\dot{\vec{x}}^2})^3}$ кривина

3. $\tau = \dfrac{\dot{\vec{x}}\,\ddot{\vec{x}}\,\dddot{\vec{x}}}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}$ торзия

$(\dot{\vec{x}}\,\ddot{\vec{x}}\,\dddot{\vec{x}}) = (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})\dddot{\vec{x}}$

$\boxed{\text{1 зад}}$ Да се намерят векторните инварианти на C. Да се намерят скаларните инварианти на C, където:

$$C: \begin{cases} x^1 = a\cdot\cos q \\ x^2 = a\cdot\sin q \\ x^3 = bq \end{cases} \qquad a, b - \text{const},\ a > 0$$
$$q \in R^1$$

Реш: $C: \vec{x}(a\cos q, a\sin q, bq)$

$\dot{\vec{x}} = (-a\sin q, a\cos q, b$

$\ddot{\vec{x}} = (-a\cos q, -a\sin q, 0)$

$\dddot{\vec{x}} = (a\sin q, -a\cos q, 0)$

$$\vec t = \frac{\dot{\vec x}}{\sqrt{\dot{\vec x}^2}}$$

$$\vec a\,(x^1, x^2, x^3)$$

$$\vec b\,(y^1, y^2, y^3)$$

$$\vec a \cdot \vec b = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$$

$$\dot{\vec x}^2 = a^2\sin^2 q + a^2\cos^2 q + b^2 = a^2 + b^2$$

$$\sqrt{\dot{\vec x}^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\vec t = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin q,\ a\cos q,\ b)$$

$$\vec a^2 = \vec a\,\vec a = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

$$\vec b = \frac{\dot{\vec x} \times \ddot{\vec x}}{\sqrt{(\dot{\vec x} \times \ddot{\vec x})^2}}$$

$$\vec a\,(x^1, x^2, x^3)$$

$$\vec b\,(y^1, y^2, y^3)$$

$$\boxed{\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} = (x^2y^3 - x^3y^2,\ -(x^1y^3 - y^1x^3),\ x^1y^2 - y^1x^2)}$$

$$\dot{\vec x} \times \ddot{\vec x} = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ -a\sin q & a\cos q & b \\ a\cos q & -a\sin q & b \end{vmatrix} = (ab\sin q - ab\cos q,\ a^2)$$

$$(\dot{\vec x} \times \ddot{\vec x})^2 = a^2b^2 + a^4 = a^2(b^2 + a^2)$$

$$\sqrt{(\dot{\vec x} \times \ddot{\vec x})^2} = a\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\vec b = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin q,\ -b\cos q,\ a)$$

$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin q, a\cos q, b)$

$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$ $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b\sin q & -b\cos q & a \\ -a\sin q & a\cos q & b \end{vmatrix}$

$-b^2\cos q - a^2\cos q - (b^2\sin q + a^2\sin q) + ab\sin q\cos q$

$= ab\sin q\cos q$

$-b^2(\cos q + \sin q) - a^2(\cos q + \sin q) =$
$= (a^2+b^2)(\cos q + \sin q)$

$= \frac{1}{a^2+b^2}\left(-(a^2+b^2)\cos q, -(b^2+a^2)\sin q, 0\right)$

Скаларни инварианти

1. $S = S(q) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{(\vec{x}'(q))^2}\, dq$

дължина на дъга

$\vec{x}' = (a^2\sin^2 q, b^2\cos^2 q, b^2)$

$\int_{q_0}^{q} \sqrt{a^2+b^2}\, dq = \sqrt{a^2+b^2}\int_{q_0}^{q} dq = \sqrt{a^2+b^2}\, q \Big|_{q_0}^{q} = \sqrt{a^2+b^2}(q - q_0)$

2. $\varkappa = \frac{\sqrt{(\vec{x}' \times \vec{x}'')^2}}{(\sqrt{\vec{x}'^2})^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} = \frac{a}{a^2+b^2}$

торзия

$3.\ \tau = \dfrac{\vec{\dot{x}}\,\vec{\ddot{x}}\,\vec{\dddot{x}}}{(\vec{\dot{x}}\times\vec{\ddot{x}})^2} = \dfrac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = \dfrac{b}{a^2+b^2}$

$\vec{\dot{x}}\,\vec{\ddot{x}}\,\vec{\dddot{x}} = (\vec{\dot{x}}\times\vec{\ddot{x}})\vec{\dddot{x}}$

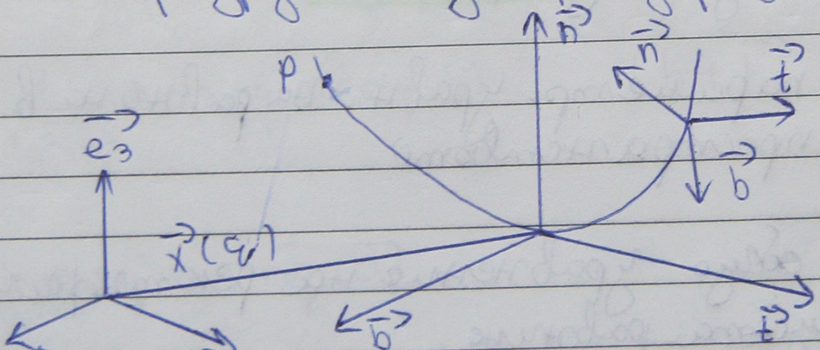
$= (ab\sin q, -ab\cos q, a^2) = (a\sin q, -a\cos q, 2a)$

$-a^2 b\sin^2 q + a^2 b\cos^2 q = a^2 b$

Деф: Крива $C: \vec{x} = \vec{x}(q) \in C^2(J)$ се нарича правилна, ако $\vec{\dot{x}}\times\vec{\ddot{x}} \neq \vec{0}\quad \forall q \in J$

Деф: Точка x_0 се нарича точка на изправяне на C ако $\vec{\dot{x}}\times\vec{\ddot{x}}(q_0) = \vec{0}$

Деф: Нека $C: \vec{x} = \vec{x}(q) \in C^2$ е правилна. Векторите $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ се наричат триедър на Френе за кривата C или придружаващ триедър за кривата C



Допирателна права в т. $\vec{x}(q)$: $l_1: \begin{cases} \ni \text{ т. } \vec{x}(q) \\ \parallel \vec{t} \end{cases}$

$l_1: \vec{y} = \vec{x} + \lambda\vec{t}$ – векторно параметрично уравнение

$l_1: \begin{cases} y_1 = x^1 + \lambda \vec{t}^1 \\ y_2 = x^2 + \lambda \vec{t}^2 \\ y^3 = x^3 + \lambda \vec{t}^3 \end{cases}$ ~~– Уравнение за главната нормала (в случая l_3)~~

Уравнение за главната нормала:

$l_2: \begin{cases} \ni \vec{x}(q) \text{ (точка)} \\ \parallel \vec{n} \end{cases}$

$l_2: \vec{y} = \vec{x} + \lambda \vec{n}$

Правата при нормалата (l_3) (бинормала)

$l_3: \begin{cases} \ni \vec{x}(q) \text{ т.} \\ \parallel \vec{b} \end{cases}$

$l_3: \vec{y} = \vec{x} + \lambda \vec{b}$

Равнината α: $\begin{cases} \ni \vec{x}(q) \text{ т.} \\ \parallel \vec{b} \\ \parallel \vec{t} \end{cases}$

се нарича ректифицираща равнина

$\alpha: \vec{y} = \vec{x} + \lambda \vec{t} + \mu \vec{b}$ – параметр. уравн. на равнина в пространството

$\alpha: \vec{n}(\vec{y} - \vec{x}(q)) = 0$ – общо уравнение на ректифицира-
$(\alpha \perp \vec{n})$ щата равнина

равнина β: $\begin{cases} \ni \vec{x}(q) \text{ т.} \\ \parallel \vec{t} \\ \parallel \vec{n} \end{cases}$

се нарича оскулачна равнина

$\beta: \vec{y} = \vec{x} + \lambda \vec{t} + \mu \vec{n}$ – параметрично уравнение

$\beta: \vec{b}(\vec{Y} - \vec{x}(q)) = 0$ – общо уравнение на оскулачна
$(\beta \perp \vec{b})$ равнина

равнина γ: $\begin{cases} \ni \vec{x}(q) \text{ т.} \\ \parallel \vec{n} \\ \parallel \vec{b} \end{cases}$

се нарича нормална равнина

$\gamma: \vec{Y} = \vec{x} + \lambda\vec{n} + \mu\vec{b}$

$\gamma: \vec{t}(\vec{Y} - \vec{x}(q)) = 0$

$\boxed{2\text{зад}}$ (продължение на $\boxed{1\text{зад}}$)
Да се намерят правите и равнините на придружаващия триедър на кривата от зад 1 $C: \begin{cases} x^1 = a\cos q \\ x^2 = b\sin q \\ x^3 = bq \end{cases}$

Реш: От реш на зад 1 имаме, че:

$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin q, a\cos q, b)$ $\quad (b \neq \vec{b})$

$\vec{n} = (-\cos q, -\sin q, 0)$

$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin q, -b\cos q, a)$

1. Права l_1: $\begin{cases} \ni \vec{x}(q) \text{ т.} \\ \parallel \vec{t} \end{cases}$

$l_1: \vec{Y} = \vec{x} + \lambda\vec{t}$

$$\ell_1: \begin{cases} y^1 = a\cos q + \lambda\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\sin q \\ y^2 = a\sin q + \lambda\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cos q \\ y^3 = bq + \lambda\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

2. Да се намери уравнение на равнината γ

$$\gamma: \begin{cases} \ni \vec{x}(q) \mid m. \\ \parallel \vec{n} \\ \parallel \vec{b} \end{cases}$$ (това е нормалната равнина)

Реш: 1. В парам. вид: $\vec{Y} = \vec{x} + \lambda\vec{n} + \mu\vec{b}$

$$\gamma: \begin{cases} y^1 = a\cos q + \lambda(-\cos q) + \mu b\sin q \\ y^2 = a\sin q + \lambda(-\sin q) + \mu(-b\cos q) \\ y^3 = bq + \lambda\cdot 0 + \mu a \end{cases}$$

(Тук сме заменили с вектор успореден на него)

2. Общо уравнение на нормалната равнина:

$\vec{t}(\vec{y} - \vec{x}(q)) = 0$

$\vec{t}\vec{y} - \vec{t}\vec{x}(q) = 0$ ($\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ е константа, затова може да се махне)

$\vec{Y} = (y^1, y^2, y^3)$

$-a\sin q\, y^1 + a\cos q\, y^2 + by^3 - a^2\cos q\sin q + a^2\cos q\sin q + bq = 0$

$\gamma: -a\sin q\, y^1 + a\cos q\, y^2 + by^3 + bq^2 = 0$

3. Да се намери уравнение на допирателната права и нормалната равнина в т. P(a, 0, b, 0) (точката P е от кривата C)

Реш: Съществува ли q такова че:

$$\begin{cases} a = a\cos q \\ 0 = a\sin q \\ b = bq \end{cases} \Rightarrow q = 0$$

Да, изпълнено е за $q = 0$

$\boxed{\text{Домашно:}}$

$$C: \begin{cases} x^1 = 2q \\ x^2 = \ln q \\ x^3 = q^2 \end{cases}, \quad q > 0$$

Да се намерят същите неща като предишната крива C и да се намерят правите и околоптичната равнина и триедъра на Френе с координати т. P(2, 0, 0)

(Това е типична зад. за контролно и тест)

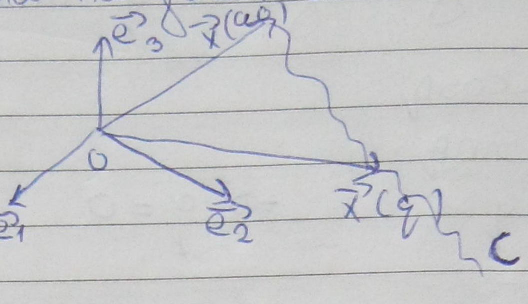
$\boxed{\text{9 упр}}$ $\boxed{\text{1 зад}}$ Да се намерят: дължината на дъгата, скаларните и векторните инварианти, правите и равнините на придружаващия триедър (триедъра на Френе) на кривата

$$C: \begin{cases} x^1 = \cos^3 q \\ x^2 = \sin^3 q \\ x^3 = \cos 2q \end{cases} \quad q \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C: \begin{cases} x^1 = \cos^3 q \\ x^2 = \sin^3 q \\ x^3 = \cos^2 q \end{cases} \qquad q \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Решение: 1) Дължината на дъгата на C

$$s = s(q) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(q)}\, dq$$



$$\cancel{\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin q, a\cos q, b)}$$

$$\dot{\vec{x}} = (3\cos^2 q \sin q, 3\sin^2 q \cos q, -2\sin 2q)$$

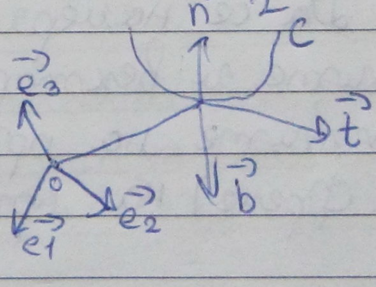
$$\cancel{\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}} \qquad \dot{\vec{x}}^2 = 9\cos^4 q \sin^2 q + 9\sin^4 q \cos^2 q + 4\sin^2 2q =$$

$$= 9\cos^2 q \sin^2 q(\cos^2 q + \sin^2 q) + 16\sin^2 q\cos^2 q =$$

$$= 9\cos^2 q \sin^2 q + 16\sin^2 q \cos^2 q = 25\sin^2 q\cos^2 q = \dot{\vec{x}}^2$$

Заместваме в интеграла

$$s = \int_{q_0}^{q} 5\cos q \sin q\, dq = -5\int_{q_0}^{q} \cos q\, d\cos q = -5\frac{\cos^2 q}{2} = \frac{5}{2}(\cos^2 q_0 - \cos^2 q)$$



(от преди)

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}}$$

$$\vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{\sqrt{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}} \qquad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$$

$$\vec{t} = \frac{1}{5\sin q\cos q}(-3\cos^2 q\sin q, 3\sin^2 q\cos q, -2\sin 2q)$$

$$\ddot{\vec{x}} = (-6\cos q\sin^2 q - 3\cos^3 q, ---, ---)$$ (става ин. трохава)

Естествен параметър и формули на Френе

$c: \vec{x} = \vec{x}(q)$ – гладка (т.е $\exists \dot{\vec{x}}(q) = \frac{d\vec{x}}{dq}$ и $\dot{\vec{x}}(q) \neq \vec{o}$)

$$s = s(q) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(q)}\, dq$$

$\exists s^{-1}$, т.е $q = q(s)$ заместваме в c

$c: \vec{x} = \vec{x}(q(s)) = \vec{y}(s)$

Пример: $x'(q) = 2q + \cos q$

$q = q(s) = e^s \qquad x'(q(s)) = 2e^s + \cos(e^s) = y'(s)$

s – естествен параметър за c

(има го като въпрос на теста): Твърдение: $c: \vec{x} = \vec{x}(q)$, q е естествен параметър за c

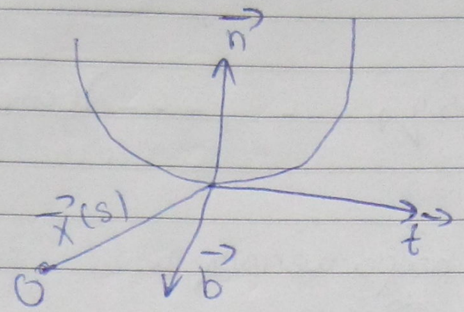
$$\Leftrightarrow \left(\frac{d\vec{x}}{dq}\right)^2 = 1$$

Ако s е естествен параметър за c, $\vec{x} = \vec{x}(s)$

$$\boxed{\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{x}', \quad \frac{d^2\vec{x}}{ds^2} = \vec{x}'' \quad \frac{d^3\vec{x}}{ds^3} = x'''}$$

$x'^2 = 1$

Нека $c: \vec{x} = \vec{x}(s)$ е трикратно гладка (s е естествен параметър).



Формули на френе $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$

$\vec{x}' = \vec{t}$

$\vec{t}' = \varkappa \vec{n}$

$\vec{n}' = -\varkappa \vec{t} + \tau \vec{b}$ $\qquad \vec{b} = \dfrac{\vec{x}' \times \vec{x}''}{|\vec{x}''|}$

$\vec{b}' = -\tau \vec{n}$ $\qquad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$

$\varkappa = \sqrt{\vec{x}''^2}$ – кривина на c

$\tau = \dfrac{\vec{x}' \vec{x}'' \vec{x}'''}{\vec{x}''^2}$ – торзия на c

$\vec{t} = \dfrac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}}$

ако $\dot{\vec{x}}$ е много тромаво:

$\vec{t}' = \dfrac{\dot{\vec{t}}}{\dot{s}}$ $\qquad \dot{s} = \sqrt{\dot{\vec{x}}^2}$ $\qquad \vec{b}' = \dfrac{\dot{\vec{b}}}{\dot{s}}$

$\varkappa = |\vec{t}'|$

$\vec{n} = \dfrac{\vec{t}'}{\varkappa}$

$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$

$\vec{b}' = \dfrac{\dot{\vec{b}}}{\dot{s}} \Rightarrow \tau = -\vec{b}'\vec{n}$

Ще докажем, че $\vec{t}' = \dfrac{\dot{\vec{t}}}{\dot{s}}$

$\vec{t} = \vec{t}(q(s))$

$\dfrac{d\vec{t}}{ds} = \vec{t}' = \dfrac{d\vec{t}}{dq} \cdot \dfrac{dq}{ds} = \dfrac{\frac{d\vec{t}}{dq}}{\frac{ds}{dq}} \overset{def}{=} \dfrac{\dot{\vec{t}}}{\dot{s}}$

Ще док. че $\dot{s} = \sqrt{\dot{\vec{x}}^2}$

От $s = s(q) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(q)}\, dq$

$\dot{s} = \dfrac{ds}{dq} \overset{def}{=} \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(q)}$

Обратно към 1 зад.

Търсим $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}, \varkappa, \tau$ на $C: \begin{cases} x^1 = \cos^3 q \\ x^2 = \sin^3 q \\ x^3 = \cos 2q \end{cases}$

Реш: $\sqrt{\dot{\vec{x}}^2} = 5\cos q \sin q$

$\dot{\vec{x}}(-3\cos^2 q \sin q,\ 3\sin^2 q \cos q,\ -4\sin q \cos q)$

$\vec{t} = \dfrac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}} = \dfrac{1}{5}(-3\cos q,\ 3\sin q,\ -4)$

От $\vec{t}' = \dfrac{\dot{\vec{t}}}{\dot{s}}$, $\dot{\vec{t}} = \dfrac{1}{5}(-3\sin q,\ 3\cos q,\ 0)$

$\boxed{\dot{s} = \sqrt{\dot{\vec{x}}^2}} = 5\cos q \sin q$

$$\vec{t}' = \frac{3}{25}\left(\frac{1}{\cos q}, \frac{1}{\sin q}, 0\right) \qquad \boxed{\vec{t}' = \frac{\dot{\vec{t}}}{\dot{s}}}$$

$$\boxed{\varkappa = |\vec{t}'|} = \frac{3}{25}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 q} + \frac{1}{\sin^2 q}} = \frac{3}{25}\cdot\frac{1}{\cos q \cdot \sin q}$$

$$\boxed{\vec{n} = \frac{\vec{t}'}{\varkappa}} = (\sin q, \cos q, 0)$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ -\frac{3}{5}\cos q & \frac{3}{5}\sin q & -\frac{4}{5} \\ \sin q & \cos q & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\left(3\sin q \cdot 0 + 4\cdot\cos q, -(-3\cos q\cdot 0 + \sin q\cdot 4), -3\cos^2 q - 3\sin^2 q\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(4\cos q, -4\sin q, -3\right)$$

$$\boxed{\vec{b}' = \frac{\dot{\vec{b}}}{\dot{s}}} = \frac{4}{25}\left(-\frac{1}{\cos q}, -\frac{1}{\sin q}, 0\right) \qquad \boxed{\vec{b} = \vec{t}\times\vec{n}}$$

$$\dot{\vec{b}} = \frac{4}{5}(-\sin q, -\cos q, 0)$$

$$\boxed{\tau = -\vec{b}'\vec{n}} = -\frac{4}{25}\,\frac{1}{\sin q\cos q}$$

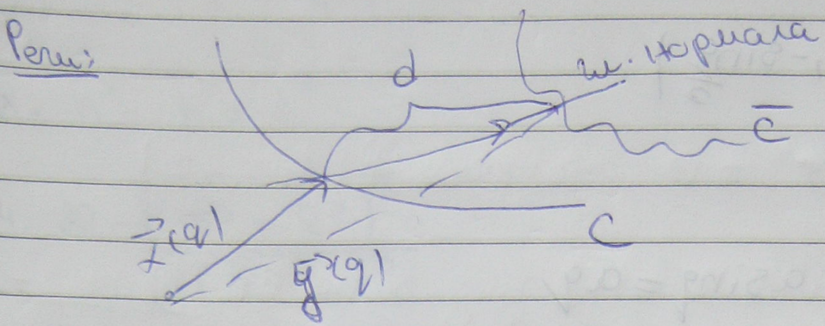
самостоятелно да се довърши

(зад като за контролно)

Зад 2 Дадена е кривата c: $\begin{cases} x^1 = a(q - \sin q) \\ x^2 = a(1-\cos q) \\ x^3 = 4a\sin\frac{q}{2} \end{cases}$ a - const

От всяка точка на c по главната нормала към вдлъбнатата ѝ част е нанесена отсечка с дължина $d = 4a^2\varkappa$. Да се намери уравнението на кривата, образувана от втория край на тази отсечка. Да се докаже, че тя е равнинна и да се определи равнината, в която тя лежи.

Реш:



$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$

Нека търсената крива е $\bar{c}$

$\bar{c}: \vec{y}(q) = \vec{x}(q) + d\vec{n}$

$\bar{c}: \vec{y} = \vec{x} + 4a^2 \varkappa \vec{n}$

От формулите на Френе имаме $\vec{t}\,' = \varkappa \vec{n}$

1) Намираме $\vec{t} = \dfrac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$

2) Намираме $\dot{\vec{t}}, \dot{s} \Rightarrow \vec{t}\,' = \dfrac{\dot{\vec{t}}}{\dot{s}} \Rightarrow \bar{c}: \vec{y} = \vec{x} + 4a^2 \vec{t}\,'$

$\dot{\vec{x}} = (a - a\cos q, a\sin q, 2a\cos\frac{q}{2})$

$\dot{\vec{x}}^2 = a^2 - 2a^2\cos q + a^2\cos^2 q + a^2\sin^2 q + 4a^2\cos^2\frac{q}{2} =$

$= a^2(1 - 2\cos q + 1 + 2(1 + \cos q)) =$

$= a^2 4 \Rightarrow \sqrt{\dot{\vec{x}}^2} = 2a$

$\Rightarrow \vec{t} = \frac{1}{2}(1 - \cos q, \sin q, 2\cos\frac{q}{2})$

$\dot{\vec{t}} = \frac{1}{2}(\sin q, \cos q, -\sin\frac{q}{2})$

$\dot{s} = \sqrt{\dot{\vec{x}}^2} = 2a$

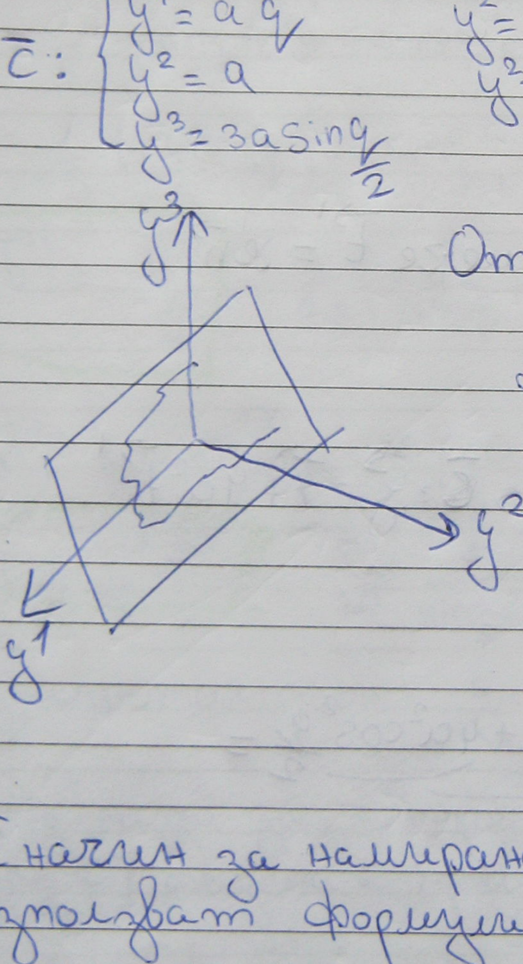
$\vec{t}' = \frac{1}{4a}\left(\sin q, \cos q, -\sin\frac{q}{2}\right)$

$\Rightarrow \bar{c} : \vec{y} = \vec{x} + 4a^2\vec{t}'$

$$\bar{c} : \begin{cases} y^1 = a(q - \sin q) + a\sin q = aq \\ y^2 = a(1-\cos q) + a\cos q = a \\ y^3 = 4a\sin\frac{q}{2} - a\sin\frac{q}{2} = 3a\sin\frac{q}{2} \end{cases}$$

$$\bar{c} : \begin{cases} y^1 = aq \\ y^2 = a \\ y^3 = 3a\sin\frac{q}{2} \end{cases}$$

$y^2 = a$ е равнина в пространството
$y^2 - a = 0 \Rightarrow$ автоматично
кривата е в равнината



От $y^2 = a$ е уравнение на равнина α

$\alpha : y^2 - a = 0$

$\Rightarrow \bar{c} \in \alpha$

$\Rightarrow \bar{c}$ е равнинна и равнината в която е $\bar{c}$ е $\alpha : y^2 - a = 0$

$\underline{\text{II}}$ начин за намиране на уравнението на $\bar{c}$ без да се използват формулите на Френе

$\bar{c} : \vec{y} = \vec{x} + 4a^2 \varkappa \vec{n}$

1. $\vec{t} = \dfrac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$

2. $\vec{b} = \dfrac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}$

3. $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$

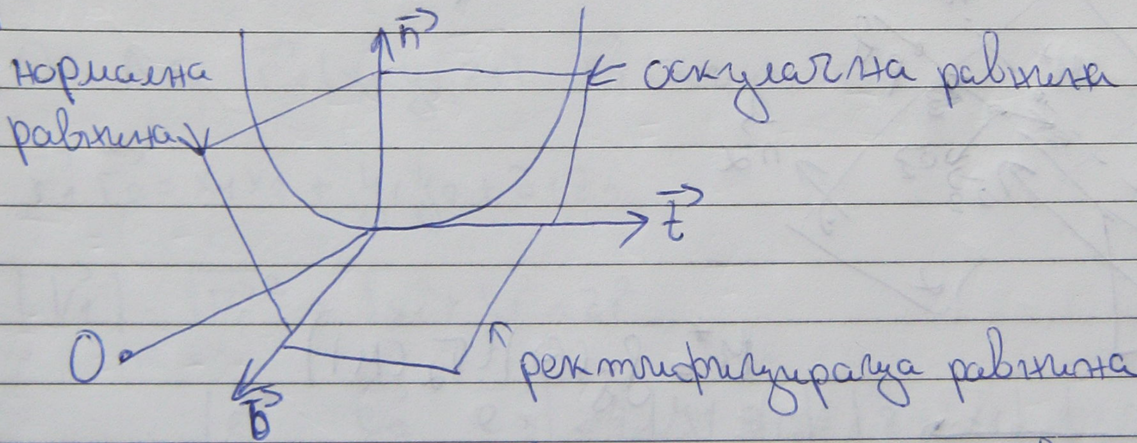
4. $\varkappa = \dfrac{\sqrt{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}}{(\sqrt{\dot{\vec{x}}^2})^3}$

Нека $c : \vec{x} = \vec{x}(q)$ е трикратно гладка

$\Rightarrow \exists$ равнина $\alpha : c \subset \alpha \Leftrightarrow \tau \equiv 0$ за $\forall q$

(от $\tau = \dfrac{\dot{\vec{x}}\,\ddot{\vec{x}}\,\dddot{\vec{x}}}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2} \Rightarrow \tau = 0 \Leftrightarrow \dot{\vec{x}}\,\ddot{\vec{x}}\,\dddot{\vec{x}} = 0$

от $\tau = \dfrac{\vec{x}'\,\vec{x}''\,\vec{x}'''}{\vec{x}'''^2} \Rightarrow \tau = 0 \Leftrightarrow \vec{x}'\,\vec{x}''\,\vec{x}''' = 0$)



Ако c е равнинна, в коя от трите равнини лежи

от c равн. $\Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow \vec{b}' = 0 \Rightarrow \vec{b} = const \Rightarrow c \in$ оскулачната равнина

От зад 2: Ако $y^1 \neq const$ и $y^2 \neq const$ и $y^3 \neq const$ $\Rightarrow$ за да се докаже, че $\bar{c}$ е равнинна трябва да се намери, че $\bar{\tau} \equiv 0$ $\forall q$ (равнината, в която лежи $\bar{c}$ е оскулачната)

Конзултация

1 зад. $K: O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$

Равнина $\alpha: x + y - 2z - 3 = 0$ и точка $P(1, 0, -2)$

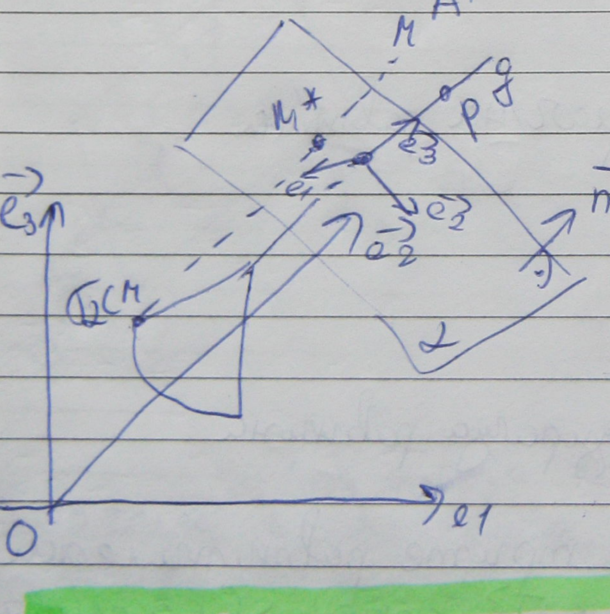
Да се намери аналитичното задаване на въртящото отражение спрямо K

$$\varphi = \rho_g(\theta) \circ \sigma_\alpha$$

където $g \ni$ т. P и $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\rho_{O'z'} \circ \sigma_{O'x'y'}$ в $K'O'x'y'z'$

$$x'^* = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A'} x' + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{p'} \quad \text{в } K'$$



$$M^* = \rho_g(\theta)(\sigma_\alpha(M))$$

$$x^* = BA'B^{-1}x^* - BA'B^{-1}\vec{OO'} + \vec{OO'} + Bp'$$

$K': O'\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}'$

$O' = g \cap \alpha$

$$\vec{e_3}' = \frac{\vec{n_\alpha}}{|\vec{n_\alpha}|}$$

$\vec{e_2}'$: Търсим $\vec{u}(x,y,z): \vec{u}\vec{n_\alpha} = 0 \quad (\vec{u} \perp \vec{n_\alpha})$

$$\vec{e_2}' = \frac{\vec{n_\alpha}}{|\vec{n_\alpha}|}$$

$\vec{e_1}' = \vec{e_2}' \times \vec{e_3}'$

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1' & e_2' & e_3' \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

От АГ $\vec{r_1}(x_1, y_1, z_1)$ $\vec{r_2}(x_2, y_2, z_2)$

$\vec{r_1}\vec{r_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$|\vec{V_1}| = \sqrt{\vec{V_1}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

$$\vec{r_1} \times \vec{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$

$n_\alpha (A, B, C) \perp \alpha$

От вертящо отражение $\Rightarrow g \perp \alpha$

$$g \perp \alpha = g \begin{cases} \ni \text{т. } P(1, 0, -2) \\ \parallel \vec{n}_\alpha (1, +1, -2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow g: \begin{cases} x = 1 + \lambda 1 \\ y = 0 + \lambda 1 \\ z = -2 + \lambda(-2) \end{cases}$$

$g \cap \alpha: \; 1 + \lambda + \lambda + 4 + 4\lambda - 3 = 0$

$6\lambda = -2 \quad \lambda = -\frac{1}{3}$

$O'\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

$\vec{n}_\alpha (1, 1, -2)$

$|\vec{n}_\alpha| = \sqrt{6}$

$\vec{e_3}' = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2)$

$\vec{e_2}' =$ Търсим $\vec{u}(x, y, z)$: $\vec{u} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$

$\vec{u}\vec{n}_\alpha = x + y - 2z = 0$

$x = 1 \; y = -1 \quad z = 0$

$\vec{u}(1, -1, 0)$

$$\vec{e_2}' = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

$$\vec{e_1}' = \vec{e_2}' \times \vec{e_3}' = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2,2,2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$O'\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$\vec{e_1}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\vec{e_2}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

$$\vec{e_3}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

$$X^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot X$$

$$-BA'B^T \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}}_{\vec{OO'}} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + B \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{p'}$$

$\boxed{2 \text{ зад}}$ Спрямо $K: O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ са дадени точки $P(1,-2,3)$ $Q(0,-2,4)$. Да се намери аналитичното задаване спрямо координатната система K на винтовото движение

$\varphi = \tau_{\vec{p}}\, g_g(\theta)$, където $g = PQ$ $|\vec{p}| = 3$

$\tau_{\vec{p}}\, g_{o'z'}(\theta)$ спрямо $K' \vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}'$

$$x'^{*} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} x' + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ p_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \to p' \\ \\ \to \text{от } |\vec{p}| = 3 \quad p_3 = 3 \end{matrix}$$

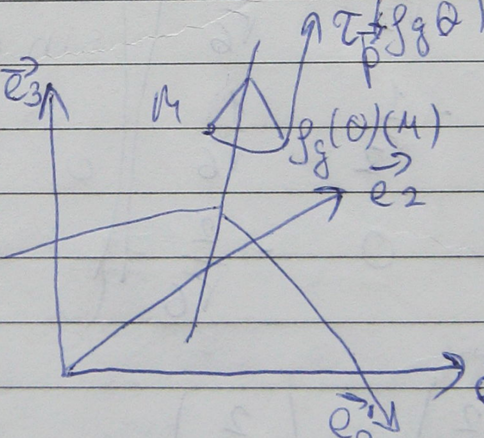
$O' \in g$

$e_3 = \dfrac{\vec{g}}{|\vec{g}|}$

$\vec{e_2}' : \vec{u}(x,y,z) : \vec{u}\,\vec{g} = 0$

$\Rightarrow \vec{e_2}' = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

$\vec{e_1}' = \vec{e_2}' \times \vec{e_3}$



$g: \begin{cases} \ni P \\ \ni Q \end{cases}$ $\quad g: \begin{cases} x = 1 + s(-1) \\ y = -2 + s\cdot 0 \\ z = 3 + s\cdot 1 \end{cases}$

$g: \begin{cases} \ni P(1,-2,3) \\ \parallel \vec{PQ}(-1,0,1) \end{cases}$

Нека $O' \equiv P(1,-2,3) \in g$

$\vec{q} = \vec{PQ} = \vec{e_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$

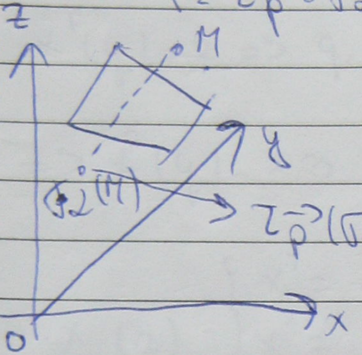
$p = (0,0,3)$

$\boxed{\text{зад } 3}$

$K: O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$

$\alpha: x-2y+z+3=0$ Да се намери аналитичното задаване на ~~плъзгащото отражение~~ φ

$\varphi = \tau_{\vec{p}} \circ \sigma_\alpha$, където $\tau_{\vec{p}}: Q(1,0,1) \to (0,0,0)$



$\varphi = \tau_{\vec{p}}\, \sigma_{O'x'y'}$ спрямо $K' O' \vec{e_1}' \vec{e_2}' \vec{e_3}'$

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x' + \underbrace{\begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{p'}$$

$O'x'y' = \alpha \Rightarrow \left| \begin{array}{l} O' \in \alpha \\ \vec{e_3}' = \frac{\vec{n_\alpha}}{|\vec{n_\alpha}|} \end{array} \right.$

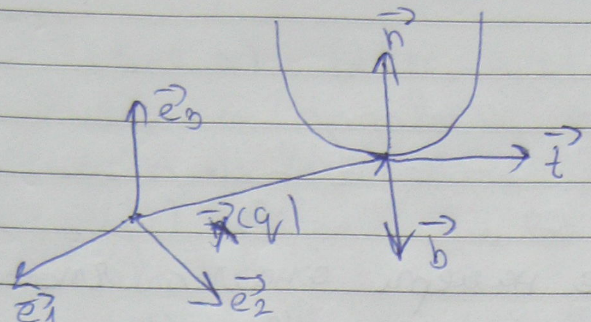
$\vec{e_2}': \vec{u}(x,y,z): \vec{u}\,\vec{n_\alpha} = 0$

$\vec{e_2}' = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ $\quad \vec{e_1}' = \vec{e_2}' \times \vec{e_3}'$

От $\tau_{\vec{p}}(Q) = O$ $\quad Q \xrightarrow{\vec{p}} O$

$\vec{p} = \vec{QO}(-1,0,-1)$ $\quad$ От ПА $\Rightarrow$ В $\vec{p}' = p = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$c: \vec{x} = \vec{x}(q)$, $q \in I \in \mathbb{R}$



допирателна $\vec{t} = \dfrac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$

бинормала $\vec{b} = \dfrac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}$

нормала $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$

кривина $\varkappa = \dfrac{\sqrt{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}}{\left(\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}\right)^3}$

торзия $\tau = \dfrac{\dot{\vec{x}}\,\ddot{\vec{x}}\,\dddot{\vec{x}}}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}$

дължина на дъгата от q_0 до q $\quad s(q) = \displaystyle\int_{q_0}^{q} \sqrt{\dot{\vec{x}}(q)^2}\, dq$

права $g_1: \begin{cases} \ni \vec{x}(q) \\ \parallel \vec{t} \end{cases}$

$\Rightarrow g_1: \vec{y} = \vec{x}(q) + \lambda \vec{t}$

оскулачна равнина $\alpha_1 \begin{cases} \ni \vec{x}(q) \\ \perp \vec{b} \end{cases}$

ректифицираща равнина $\alpha_3 \begin{cases} \ni \vec{x}(q) \\ \perp \vec{t} \end{cases}$

$\alpha_3: \vec{t}(y - \vec{x}(q)) = 0$

т. $P(2,-3,7)$

$x^1(q) = 2 \Rightarrow q$

$\Rightarrow x^2(q) = -3 \quad x^3(q) = 7$

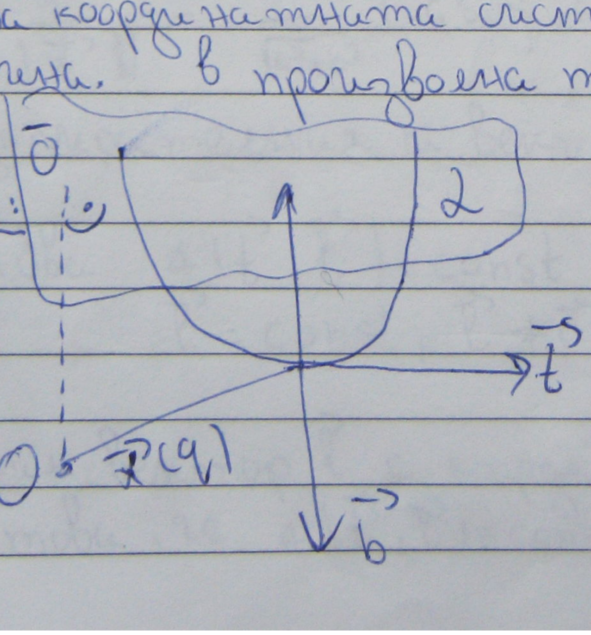
$x(2) \begin{cases} x^1 = \cos q \\ x^2 = \sin q \\ x^3 = 2 \end{cases} \quad (1,0,2)$ при $q=0$

---

10 упр **1 зад** $c: \begin{cases} x^1 = \cos^3 q \\ x^2 = \sin^3 q \\ x^3 = \cos 2q \end{cases} \quad q \in (0, \frac{\pi}{2})$

Да се намерят параметрични уравнения на геометричното място $\bar{c}$ на ортогоналните проекции на началото на координатната система върху оскулачната равнина в произволна точка на c

Реш:



$\vec{b} \perp \alpha$

$\vec{b} \perp \alpha$

През т.O се построява права която е $\perp \alpha$, т.е

$l \parallel \vec{b}$

$l : \begin{cases} \ni \text{ т. } (0,0,0) \\ \parallel \vec{b} \end{cases}$

$l : \vec{y} = \vec{OO} + \lambda \vec{b}$

$l : \vec{y} = \lambda \vec{b}$ Търсим уравнението на $O\bar{O}$

уравнение на оскулачната равнина α:

$\alpha : \begin{cases} \ni \vec{x}(q) \\ \perp \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \alpha : \vec{b}(\vec{z} - \vec{x}) = 0$

където $\vec{z}$ са координатите на произволна точка от равнината α

$\alpha \cap l = \bar{O}$

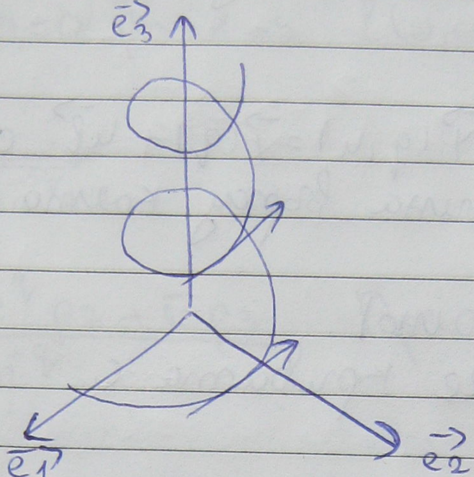
$\begin{vmatrix} \vec{b}(\vec{y} - \vec{x}) = 0 \\ \vec{y} = \lambda \vec{b} \end{vmatrix}$

$\vec{b}(\lambda \vec{b} - \vec{x}) = 0 \quad \lambda \vec{b}^2 - \vec{b}\vec{x} = 0$

$\lambda = \vec{b} x \Rightarrow \bar{c} : \bar{y} = (\vec{b}\vec{x}) \cdot \vec{b}$

Обща винтова линия

Деф: Линия C която е трикратно гладка се нарича обща винтова линия ако тангентите ѝ във всяка нейна точка сключват постоянен ъгъл с постоянна посока



Пример: $C \begin{cases} x^1 = a\cos q \\ x^2 = a\sin q \\ x^3 = bq \end{cases}$

Да намерим допирателния вектор на тази линия

$\dot{\vec{x}}(-a\sin q, a\cos q, b)$

$\dot{\vec{x}}^2 = a^2 + b^2$

$\vec{t} = \dfrac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin q, a\cos q, b)$ – това е уравнението на допирателния ѝ вектор

Трябва $\angle(\vec{t}, \vec{\ell}) = const$
$\vec{\ell} = const, \vec{\ell} \neq \vec{0}$

Търсим вектор $\vec{\ell}$ с координати (p_1, p_2, p_3) такъв, че от това, че $\angle(\vec{t}, \vec{\ell}) = const \Leftrightarrow \vec{t}\vec{\ell} = const$

$\vec{t} \cdot \vec{l} = const \quad \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a p1 \sin q + a p2 \cos q + p3 b) = const$

Нека $\vec{p1} = p2 = 0$ и $p3 = 1$ $\quad l = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow \vec{t}\,\vec{l} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = const \Rightarrow$ c е обща винтова линия

Деф: Повърхнината $S: \vec{Y}(q,u) = \vec{x}(q) + u\vec{l}$ се нарича цилиндрична повърхнина върху която лежи c

$\boxed{2\text{ зад}}$ (като за контролно)

Да се докаже, че кривата c

$$c: \begin{cases} x^1 = e^q \\ x^2 = e^{-q} \\ x^3 = \sqrt{2}\cdot q \end{cases}$$

е обща винтова линия и да се намери цилиндричната повърхнина върху която тя лежи

Решение: 1) Намира се $\vec{t}$ $\quad t = \frac{\vec{\dot{x}}}{|\vec{\dot{x}}|}$

2) Търси се $\vec{l}(p1, p2, p3)$: $\vec{l}\,\vec{t} = const$

3) $S: \vec{Y}(q,u) = \vec{x}(q) + u\vec{l}$

$$c: \begin{cases} x^1 = e^q \\ x^2 = e^{-q} \\ x^3 = \sqrt{2}q \end{cases} \qquad \vec{\dot{x}}(e^q, -e^{-q}, \sqrt{2})$$

$$\vec{\dot{x}}^2 = e^{2q} + e^{-2q} + 2$$

$|\vec{\dot{x}}| = \sqrt{e^{2q} + e^{-2q} + 2}$

$t = \frac{1}{\sqrt{e^{2q} + e^{-2q} + 2}}(e^q, e^{-q}, \sqrt{2})$

Търсим $\vec{l}(p_1, p_2, p_3)$ такива че:

$$\vec{l}\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{e^{2q}+e^{-2q}+2}}(e^q, -e^{-q}p_2, +\sqrt{2}p_3) = const$$

Нека $p_1 = 0$ $p_2 = 0$ $p_3 = 1 \Rightarrow l(0,0,1)$

$$\Rightarrow \vec{l}\vec{t} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^{2q}+e^{-2q}+2}}$$

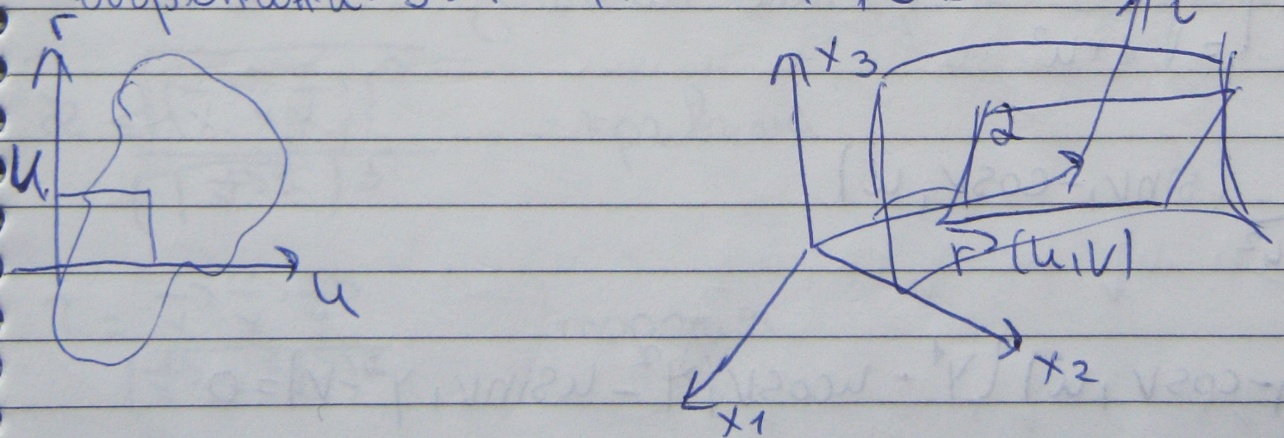
$$\vec{l}\vec{t} = \frac{e^q p_1 - e^{-q}p_2 + \sqrt{2}p_3}{e^q + e^{-q}}$$ При $p_1 = 1$ $p_2 = -1$ $p_3 = 0$

$$\vec{l}\vec{t} = 1$$

$$S: \begin{cases} y^1 = e^q + u \cdot 1 \\ y^2 = e^{-2} + u(-1) \\ y^3 = \sqrt{2}q + u(0) \end{cases}$$

Материал който не влиза в контролното и изпита но влиза в теста

Повърхнини: $S: \vec{r}(u,v)$ $(u,v) \in D$



Нормален вектор на повърхнина

$$\vec{l} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|}$$

Допирателна равнина към α: $\begin{cases} \ni \vec{r}(u,v) \\ \perp \vec{l} \end{cases}$

Общо уравнение: на $\alpha : \vec{l}(\vec{x} - \vec{r}) = 0$

зад

$$S: \begin{cases} x^1 = u\cos v \\ x^2 = u \sin v \\ x^3 = v \end{cases}$$

Да се намери $\vec{l}$ и допирателната равнина α на S α и допирателната равнина в точка $(1,0,0)$

Реш: $\vec{r}(u\cos v, u\sin v, v)$

диф. по u $\vec{r_u}(\cos v, \sin v, 0)$

диф. по v $\vec{r_v}(-u\sin v, u\cos v, 1)$

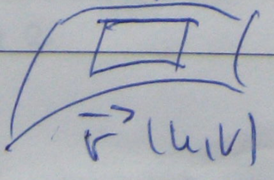
$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = (\sin v, -\cos v, u)$

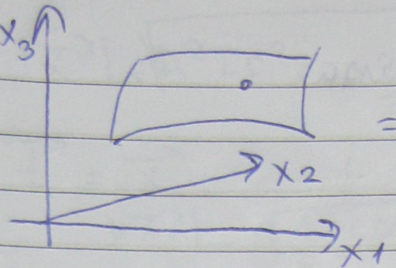
$|\vec{r_u} \times \vec{r_v}| = \sqrt{1+u^2}$

$$\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\sin v, -\cos v, u)$$

$\alpha : (\sin u, -\cos v, u)(y^1 - u\cos v, y^2 - u\sin v, y^3 - v) = 0$

$\alpha : \sin v\, y^1 - \cos v\, y^2 + u y^3 - uv = 0$





От $(1,0,0) \in S$
$\Rightarrow \exists\, u, v$, такива, че

$$\begin{cases} 1 = u\cos v \\ 0 = u\sin v \\ 0 = v \end{cases} \qquad \cos 0 = 1 \qquad v = 0 \qquad u = 1$$

$\Rightarrow \vec{l}$ в т$(1,0,0)$ $l = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$

(Подготовка за контролно)

Формули за крива

крива $c: \vec{x}(x^1, x^2, x^3)$ $\quad \dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dq} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$

Векторни инварианти на c:

$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$ – единичен вектор на допирателната

$\vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}$ – единичен вектор на ~~главната~~ бинормалата

$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$ – единичен вектор на главната нормала

$\varkappa = \frac{\sqrt{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}}{\left(\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}\right)^3}$ – кривина

$\tau = \frac{\dot{\vec{x}}\,\ddot{\vec{x}}\,\dddot{\vec{x}}}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}$ – торзия

$s = \int_{q_0}^{q} \sqrt{\dot{\vec{x}}(q)^2}\, dq$

$\alpha_1: \begin{cases} \ni \vec{x}(q) \\ \perp \vec{t} \end{cases}$ – нормална равнина

$\alpha_1: \begin{cases} \ni \vec{x} \\ \parallel \vec{b} \\ \parallel \vec{n} \end{cases}$

$$\vec{y} = \vec{x} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{n}$$

$\boxed{\text{Зад}}$ (като за тест, изпит, контролно)

Дадена е кривата c

$$c: \begin{cases} x^1 = R + R\cos q \\ x^2 = R\sin q \\ x^3 = 2R\sin\frac{q}{2} \end{cases} \qquad 0 < q < 4\pi \qquad R = const$$

Да се намери:

а) векторните и скаларните инварианти на c

б) правите и равнините на придружаващия триедър на c (триедъра на Френе)

в) да се намери уравнение на бинормалата и ректифициращата равнина на c в точката $P(R, R, \frac{4}{\sqrt{2}}R)$

Реш: $\dot{\vec{x}}(-R\sin q, R\cos q, R\cos\frac{q}{2})$

$\ddot{\vec{x}}(-R\cos q, -R\sin q, -\frac{R}{2}\sin\frac{q}{2})$

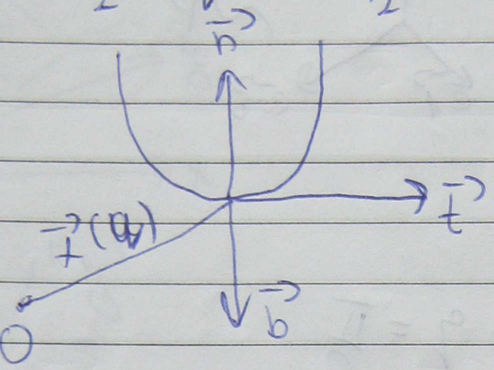
$\dddot{\vec{x}}(R\sin q, -R\cos q, -R\cos\frac{q}{2})$

$$|\dot{\vec{x}}| = \sqrt{R^2 + R^2\cos\frac{q}{2}} = R\sqrt{1+\cos^2\frac{q}{2}}$$

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\frac{q}{2}}}\left(-\sin q, \cos q, \cos\frac{q}{2}\right)$$

$$\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} = \left(-\frac{1}{2}\cos q, \sin\frac{q}{2} + \sin q\cos\frac{q}{2}, -\frac{1}{2}\sin q\sin\frac{q}{2} - \cos q\cos\frac{q}{2}, 1\right)$$

б)



права $g_1 \begin{cases} \ni \vec{x}(q) \\ \parallel t \end{cases}$ $\quad \vec{y} = \vec{x}(q) + \lambda\vec{t}$ тангента

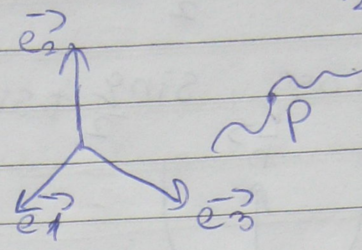
$g_2 \begin{cases} \ni \vec{x}(q) \\ \parallel \vec{n} \end{cases}$ $\quad \vec{y} = \vec{x}(q) + \lambda\vec{n}$ бинормала

$g_3 \begin{cases} \ni \vec{x}(q) \\ \parallel \vec{b} \end{cases}$ $\quad \vec{y} = \vec{x} + \lambda\vec{b}$

$$g_1 \begin{cases} y_1 = R + R\cos q + \lambda\dfrac{(-\sin q)}{\sqrt{1+\cos^2\frac{q}{2}}} \\ y_2 = R\sin q + \dfrac{\lambda\cos q}{\sqrt{1+\cos^2\frac{q}{2}}} \\ y^3 = 2R\sin\frac{q}{2} + \dfrac{\lambda\cos\frac{q}{2}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{q}{2}}} \end{cases}$$

Нормална равнина

$$\frac{1}{1+\cos^2\frac{q}{2}}\left(-\sin q, \cos q, \cos\frac{q}{2}\right)\left(y^1 - R - R\cos q,\ y^2 - R\sin q,\ y^3 - 2R\sin\frac{q}{2}\right) = 0$$



в) т. $P(R, R, \sqrt{2}R)$

От $P \in C$

$$\begin{cases} R = R + R\cos q \\ R = R\sin q \\ \sqrt{2}R = 2R\sin\frac{q}{2} \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\cos q = 0 \\ &\sin q = 1 \\ &\Rightarrow q = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

За коя крива $\varkappa = 0$ $\forall q$ ~ права

За коя крива $\tau = 0$ $\forall q$ ~ равнина

Ако една крива е равнинна в коя равнина лежи в триедъра на френе? ~ Оскулачната

$\boxed{\text{Зад}}$ $K: \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ в равнина

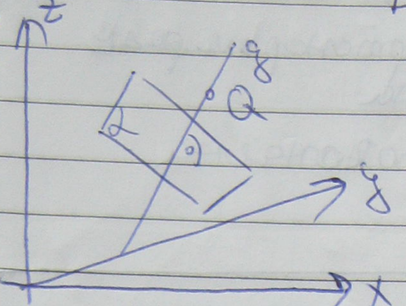
$\alpha: x + 2y - 2z + 1 = 0$ и т $Q(1, 0, -1)$

Да се намери аналитично задаване на въртящото отражение $\rho = \rho_g(\theta) \circ \sigma_\alpha$ където $g \ni Q$

Реш: По деф $g \perp \alpha$ $\quad K' O' \vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'$

$\rho: \rho_{O'z'} \circ \sigma_{O'x'y'}$

$$x'^* = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A'} x' + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{p'}$$



$\alpha = O'x'y'$

Нова ортонормирана координатна система

$K' = O'\vec{e_1}'\vec{e_2}'\vec{e_3}'$ и $g \equiv O'z'$

$\Rightarrow O' = \{\alpha \cap g$

$\vec{e_3}' = \dfrac{\vec{n}_\alpha}{|\vec{n}_\alpha|}$

$\vec{e_2}' : \vec{u}(x, y, z) : \vec{u}\,\vec{n}_\alpha = 0$

$\vec{e_2}' = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

$\vec{e_2}' \perp \vec{e_3}'$

$\vec{e_1}' = \vec{e_2}' \times \vec{e_3}'$

$x^* = BA'B^{-1}x = -BA'B\,\vec{OO'} + \vec{OO'} + B\vec{p}'$

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{e_1}' & \vec{e_2}' & \vec{e_3}' \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$\vec{PQ} = (Q - P)$

(покоординатно)

По деф: $A_{n\times n}$ се нарича ортогонална ако $AA^T = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$

$\Rightarrow \det A = \pm 1$

Твърдение: Ако $K: O\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ е ортонормирана и $K': O', \vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'$ е ортонормирана $\Rightarrow$ матрицата на прехода е ортогонална

09.06.2012г. Контролно 2

1 зад Спрямо дадена ОКС $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ в E_3 са дадени точките: $A(3,1,4)$ и $B(0,1,0)$

Да се намери аналитичното задаване на винтово движение φ с ос на ротация g минаваща през точките A и B, ъгъл на ротация $\theta = \frac{\pi}{2}$ и стъпка 5

2 зад Спрямо дадена ОКС $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ в E_3 е дадена кривата

$$\gamma: \begin{cases} x^1 = 2q \\ x^2 = \ln q \\ x^3 = q^2 \end{cases} \qquad q > 0$$

а) Да се намерят скаларните и векторните инварианти в точка от γ

б) Да се докаже, че γ е обща винтова линия и да се намерят уравнения на цилиндричната повърхнина, която я съдържа

в) Да се намерят уравненията на нормалната равнината и бинормалата в точката P(2, 0, 1) от кривата γ

Аксонометрия

Всяка точка $\bar{A}$ в аксонометрия се изобразява чрез двойката (A, A_1), където A е проекцията на $\bar{A}$, A_1 е първата вторична проекция на $\bar{A}$.
$AA_1 \parallel OE_z$

Всяка права $\bar{a}$ в аксонометрия се изобразява чрез двойката (a, a_1), a и a_1 не може едновременно да са точки

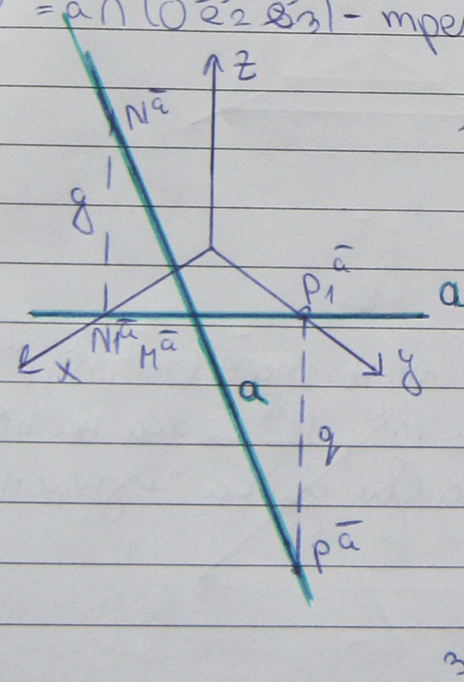
Следи на правата $\bar{a}(a, a_1)$ са нейните прободни в координатните равнини съществуват

Тези следи не винаги съществуват

$\bar{M}^{\bar{a}} = \bar{a} \cap (\bar{O}\vec{e_1}\vec{e_2})$ – първа следа на правата $\bar{a}$

$\bar{N}^{\bar{a}} = \bar{a} \cap (\bar{O}\vec{e_1}\vec{e_3})$ – втора следа на правата $\bar{a}$

$\bar{P}^{\bar{a}} = \bar{a} \cap (\bar{O}\vec{e_2}\vec{e_3})$ – трета следа на правата $\bar{a}$



1) $\bar{M}^{\bar{a}} = a \cap a_1$

2) $N_1^{\bar{a}} = a_1 \cap OE_x$

$g: \begin{cases} \ni G_1^{\bar{a}} \\ \parallel Oz \end{cases}$

$g \cap a = N^{\bar{a}}$

$\bar{N}^{\bar{a}}(N^{\bar{a}}, N_1^{\bar{a}})$

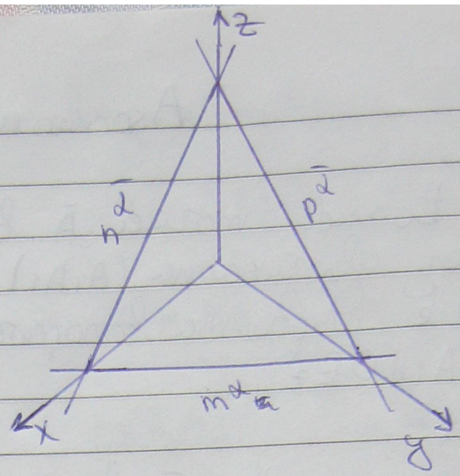
3) $P_1^{\bar{a}} = a_1 \cap OE_y$

$q: \begin{cases} \ni P_1^{\bar{a}} \\ \parallel Oz \end{cases}$

$q \cap a = P^{\bar{a}}$ $\bar{P}^{\bar{a}}(P^{\bar{a}}, P_1^{\bar{a}})$

Дири на равнина $\bar{\alpha}$

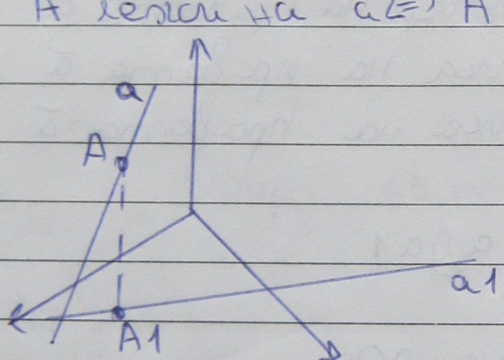
$\bar{m}^{\alpha} = \bar{\alpha} \cap (\bar{O}\vec{e_1}, \vec{e_2})$
$\bar{n}^{\alpha} = \bar{\alpha} \cap (\bar{O}\vec{e_1}, \vec{e_3})$
$\bar{p}^{\alpha} = \bar{\alpha} \cap (\bar{O}\vec{e_2}\, \vec{e_3})$



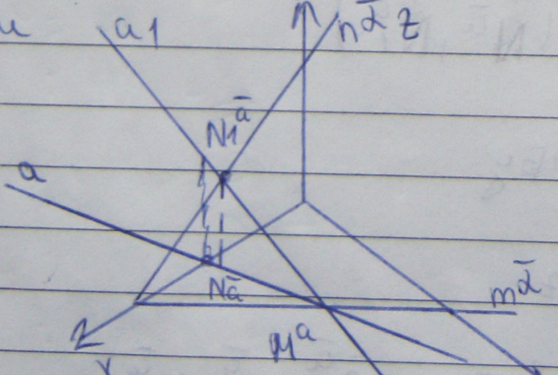
Поне две от тези дири винаги съществуват.

Всяка равнина $\bar{\alpha}$ в аксонометрия се изобразява чрез проекциите на две от нейните съществуващи дири.

Нека имаме точката $\bar{A}(A, A_1)$ и правата $\bar{a}(a, a_1)$
Тогава $\bar{A}$ лежи на $\bar{a} \Leftrightarrow A$ лежи на a и A_1 лежи на $\bar{a}_1$

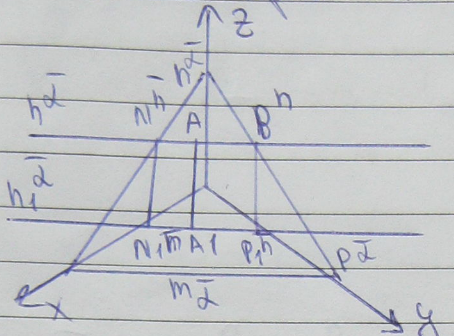


Нека имаме правата $\bar{a}(a, a_1)$ и равнината $\bar{\alpha}(m^{\bar\alpha}, n^{\bar\alpha}, p^{\alpha})$
Тогава $\bar{a}$ лежи $\bar{\alpha} \Leftrightarrow M^{a}$ лежи на m^{α}, $N^{\bar a}$ лежи на n^{α}, $P^{\bar a}$ лежи на $p^{\bar\alpha}$. Достатъчно е само две да са изпълнени

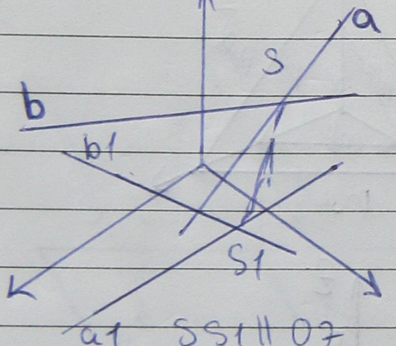


Нека $\bar\alpha$ е равнина. Главна права от ред първа система за $\bar\alpha$ наричаме $h^{\bar\alpha}$, която лежи в $\bar\alpha$ и $h_1^{\bar\alpha} \parallel m^{\alpha}$
$\bar h^{\bar\alpha}(h^{\bar\alpha}, h_1^{\bar\alpha})$

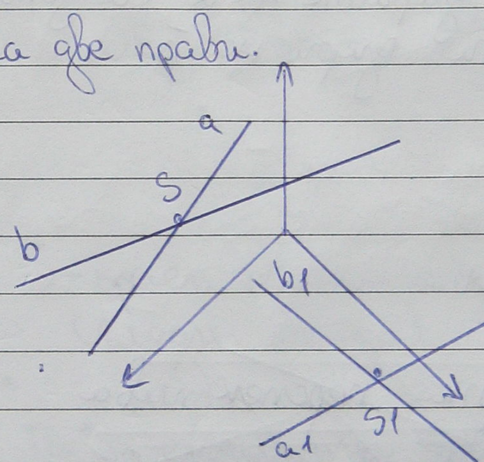
Нека $\bar A(A, A_1)$ е точка. $\bar A$ лежи в $\bar\alpha \Leftrightarrow \bar A$ лежи на някоя главна права $\bar h^{\bar\alpha}(h^{\bar\alpha}, h_1^{\bar\alpha})$ от първа система на $\bar\alpha$



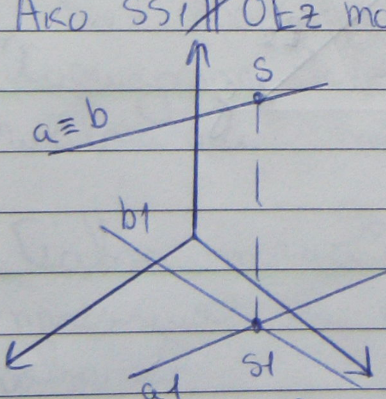
Нека $\bar a(a, a_1)$ и $\bar b(b, b_1)$ са две прави.

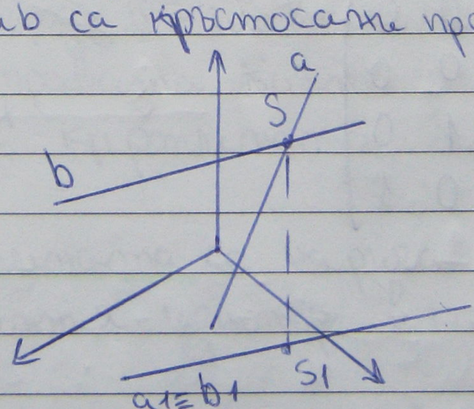


$SS_1 \parallel OZ$



Нека $\bar a$ а пресича b в т. S и a_1 пресича b_1 в т. S_1
Ако $SS_1 \parallel OE_z$ то $\bar a$ и $\bar b$ се пресичат в т. $\bar S(S, S_1)$.
Ако $SS_1 \nparallel OE_z$ тогава $\bar a$ и $\bar b$ са кръстосани прави



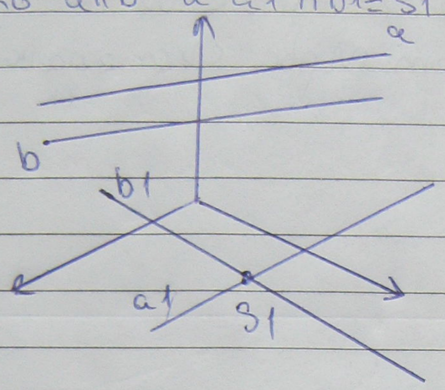


Ако a, b съвпадат и a_1 b_1 се пресичат в S_1, то $\bar a$ и $\bar b$ се пресичат в $\bar S(S, S_1)$, където S е пресечната точка на правата през S_1 успоредна на OE_z и правата $a \equiv b$

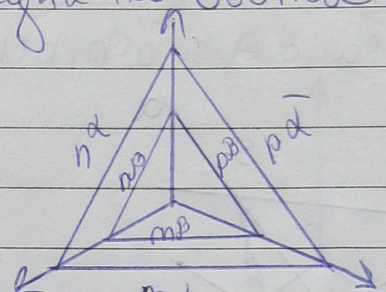
Ако $a \parallel b$ и $a_1 \parallel b_1$ то $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Ако $a \parallel b$, $a_1 \equiv b_1$, то $\bar{a} \parallel \bar{b}$

Ако $a \parallel b$ и $a_1 \cap b_1 = S_1$ то $\bar{a}$ и $\bar{b}$ са кръстосани



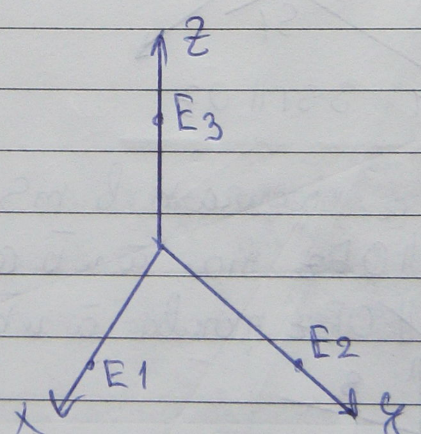
Нека $\bar{\alpha}(m^{\alpha}, n^{\alpha}, p^{\alpha})$, $\bar{\beta}(m^{\beta}, n^{\beta}, p^{\beta})$ са две равнини. Тогава $\bar{\alpha} \parallel \bar{\beta} \Leftrightarrow$ дирите на $\bar{\alpha}$ са успоредни на съответните едноименни дири на $\bar{\beta}$



Кавалиерна перспектива

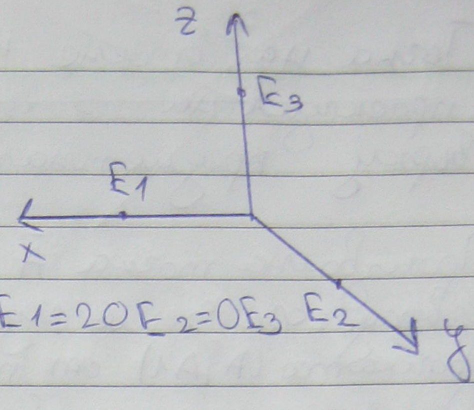
$OE_1 = OE_2 = OE_3$

$$C\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



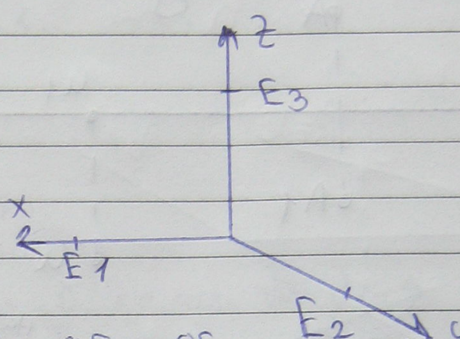
кабинетна проекция

$$C_T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



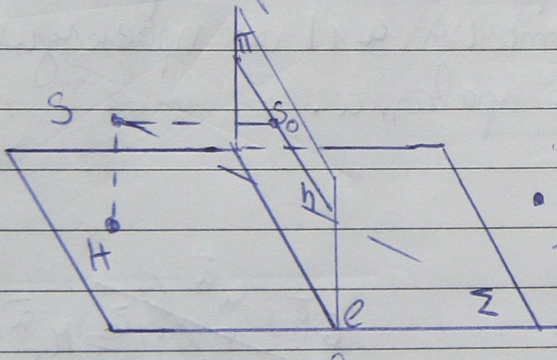
$OE_1 = 2OE_2 = OE_3$

военна перспектива



$OE_1 = OE_2 = OE_3$

Перспектива



S – краен проекционен център (гледна точка)

П – проекционна равнина (картинна равнина

Σ – предметна равнина $\Sigma \perp \Pi$

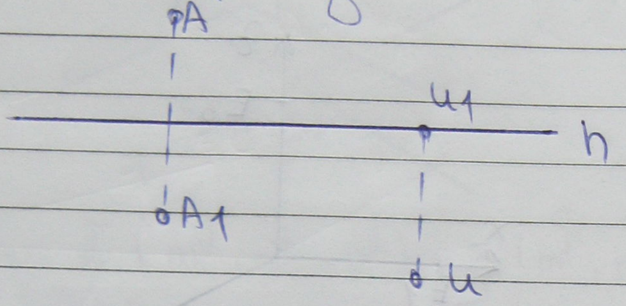
S_0 – проекция на S върху П – главна т. на картината

Хоризонт се нарича правата която минава през главната точка на картината

Главна точка на картината (S_0) се нарича ортогонална проекция на проекционния център в картинната равнина

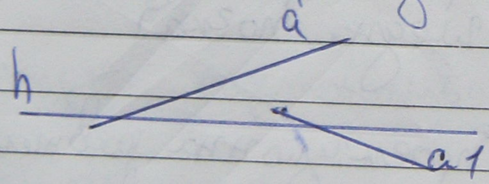
Точка на стоене H се нарича ортогоналната проекция на S върху проекционния център S върху предметната равнина Σ.

Произволна точка $\bar{A}$ от пространството, която не съвпада със S се изобразява в перспектива чрез двойката (A, A1) от проекцията и вторичната точка проекция на точката $AA_1 \perp h$



Безкрайната точка на $\bar{a}$ (u_1, u) $u_1 \in h$ $u_1u \perp h$

Произволна права $\bar{a}$ в пространството в перспектива се изобразява чрез двойката (a, a_1) от проекцията и вторичната проекция на правата.



Следи на права:

$\bar{M}^{\bar a} \Rightarrow \bar{a} \cap \Sigma$; $a \cap a_1 = M^a$

$\bar{G}^{\bar a}$: 1) $a_1 \cap l = G_1^{\bar a}$

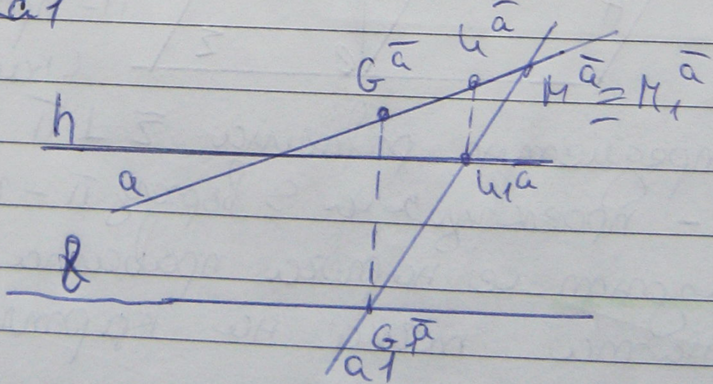
2) права p. $\begin{cases} \ni G_1^{\bar a} \\ \perp l \end{cases}$

3) $p \cap a = G^{\bar a} \Rightarrow \bar{G}^{\bar a}(G^{\bar a}, G_1^{\bar a})$

$\bar{u}^{\bar a}$: 1) $a_1 \cap h = u_1^{\bar a}$ 2) права g: $\begin{cases} \ni u_1^{a} \\ \perp h \end{cases}$

3) $g \cap a = u^{\bar a}$

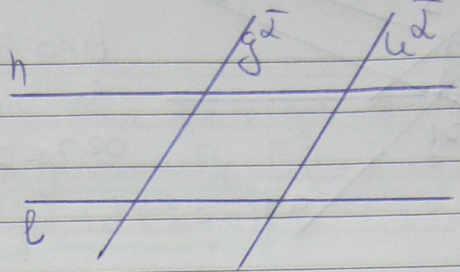
$\Rightarrow \bar{u}^{\bar a}(u^{\bar a}, u_1^{\bar a})$



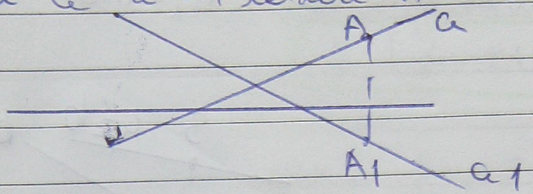
Дири на равнина:

g^{α} - $\bar{\alpha} \cap \Pi$

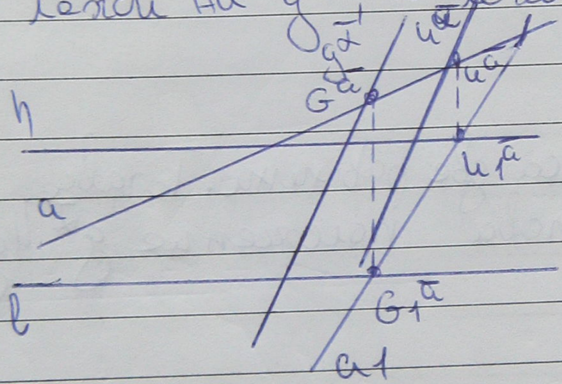
$u^{\bar{\alpha}}$ - безкрайната права на $\bar{\alpha}$



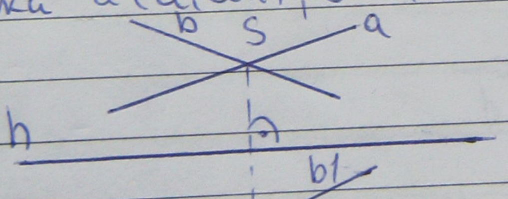
Нека $\bar{A}(A, A1)$, $\bar{a}(a, a1)$. Тогава $\bar{A}$ лежи на $\bar{a}$ <=> A лежи на a и A1 лежи на a1.



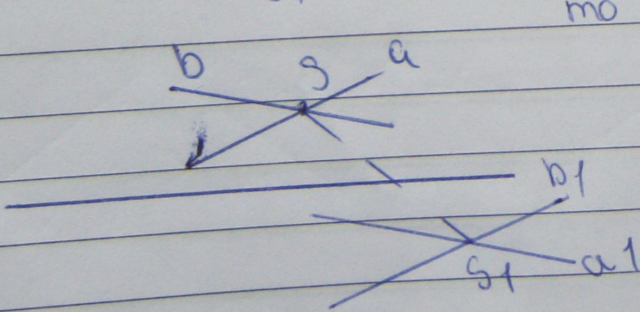
Нека $\bar{a}(a, a1)$, $\bar{\alpha}(g^{\alpha}, u^{\alpha})$. Тогава $\bar{a}$ лежи на $\bar{\alpha}$ <=> G^{a} лежи на g^{α}, $u^{\bar{a}}$ лежи на $u^{\bar{\alpha}}$

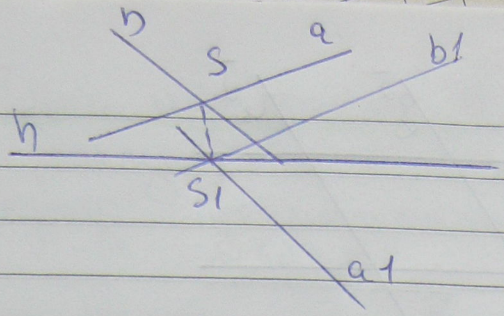


Нека $\bar{a}(a, a1)$, $\bar{b}(b, b1)$ са две прави в пространството



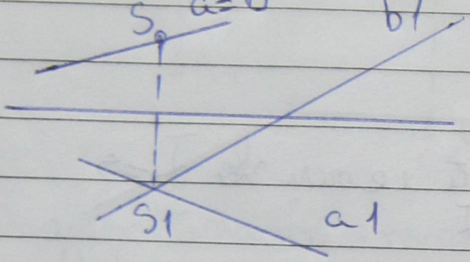
Нека $a \cap b = S$, $a1 \cap b1 = S1$
Ако $SS1 \perp h$, то $\bar{a}, \bar{b}$ се пресичат в $\bar{S}(S, S1)$. Ако $\bar{S}(SS1) \not\perp h$ то $\bar{a}$ и $\bar{b}$ са кръстосани

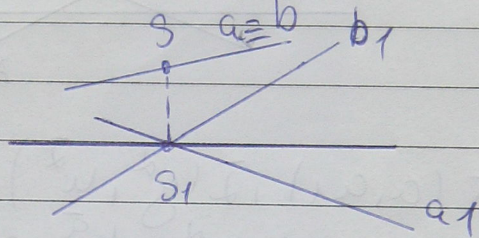




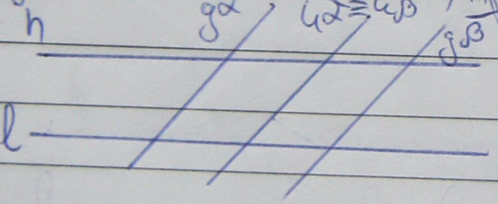
Ако $a \cap b = S$ и $a1 \cap b1 = S1$ и $S1 \in h \Rightarrow$ т.е. $\bar{S}(S, S1)$ е безкрайна точка то $\bar{a} \parallel \bar{b}$

Нека $a \equiv b$. Ако $a1 \cap b1 = S1$, то $\bar{a}$ и $\bar{b}$ се пресичат в точката $\bar{S}(S, S1)$, където точката S е пресечна точка на правата през $S1$, перпендикулярна на хоризонта h. Ако $S1$ лежи на h, то $\bar{a}$ и $\bar{b}$ са успоредни





Нека $\bar{\alpha}(g^{\alpha}, u^{\bar{\alpha}})$ и $\bar{\beta}(g^{\beta}, u^{\bar{\beta}})$ са две равнини. Тогава $\bar{\alpha} \parallel \bar{\beta} \Leftrightarrow u^{\alpha} \equiv u^{\bar{\beta}}$, при това положение $g^{\bar{\alpha}} \parallel g^{\bar{\beta}}$



Крива

Нека $\gamma = r(q)$ - гладка крива

Допирателната g през точка P, $\vec{OP} = \vec{r}(q_0)$ има векторно уравнение $\boxed{g: \vec{r}(q_0) + \lambda \dot{\vec{r}}(q_0)}$

Оскулачната равнина α в точка P, $\vec{OP} = \vec{r}(q_0)$ има уравнение $\boxed{\alpha: (y - r(q_0))\,\dot{r}(q_0)\,\ddot{r}(q_0) = 0}$

уравнение на нормална равнина:

$$\boxed{\alpha: (x - r(q_0)) \cdot \dot{r}(q_0) = 0}$$

Кривата γ с уравнение $\gamma: r = \vec{r}(q)$ е отнесена към естествения си параметър ако $\boxed{\dot{r}(q)^2 = 1}$

Ако кривината на двукратно гладка крива γ във всяка точка е 0 то γ е права

Ако торзията на двукратно гладката крива γ е 0 във всяка точка, то γ е равнинна крива и $\vec{b} = const$

$\vec{t}$ - допирателна $\quad \vec{n}$ - нагоре $\quad \vec{b}$ - навътре

$$\vec{t}' = \frac{\dot{\vec{t}}}{\dot{s}} \qquad \vec{b}' = \frac{\dot{\vec{b}}}{\dot{s}} \qquad \dot{s} = \sqrt{\dot{\vec{x}}^2}$$

$$\vec{t}' = \varkappa \vec{n} \qquad \vec{b}' = -\tau \vec{n}$$