Контролно по ЕАИ на тема контекстно-свободни езици зимен семестър 2015/2016г.

15.01.2016г.

Първа задача

Условие:

Дадена е следната контекстно-свободна граматика $\langle \{ S, R \}, \{ a, b, c, d \}, S, P \rangle$, където $P = \{ S \longrightarrow bSa, S \longrightarrow R, R \longrightarrow cdR, R \longrightarrow dcR, R \longrightarrow \epsilon \}$. Да се построи недетерминиран стеков автомат, разпознаващ точно езика на граматиката.
Да се проследи работата на автомата, при разпознаване на думите $bbbaaa$ и $bdcdccddca$.

Решение:

По тази граматика построяваме автомата $\langle \{ a, b, c, d \}, \{ S, R, a, b, c, d \}, \{ q \}, q, S, \emptyset, \delta \rangle$, където:

$$\begin{aligned}
\delta(q, \epsilon, S) &= \{ \langle q, bSa \rangle, \langle q, R \rangle \}, \\
\delta(q, \epsilon, R) &= \{ \langle q, cdR \rangle, \langle q, dcR \rangle, \langle q, \epsilon \rangle \}, \\
\delta(q, a, a) &= \langle q, \epsilon \rangle, \\
\delta(q, b, b) &= \langle q, \epsilon \rangle, \\
\delta(q, c, c) &= \langle q, \epsilon \rangle, \\
\delta(q, d, d) &= \langle q, \epsilon \rangle.
\end{aligned}$$

За двете думи имаме следние последователности от конфигурации на автомата:

$$\begin{aligned}
&\langle q, bbbaaa, S \rangle \vdash \langle q, bbbaaa, bSa \rangle \vdash \langle q, bbaaa, Sa \rangle \vdash \langle q, bbaaa, bSaa \rangle \vdash \langle q, baaa, Saa \rangle \vdash \langle q, baaa, bSaaa \rangle \vdash \\
&\qquad \langle q, aaa, Saaa \rangle \vdash \langle q, aaa, Raaa \rangle \vdash \langle q, aaa, aaa \rangle \vdash \langle q, aa, aa \rangle \vdash \langle q, a, a \rangle \vdash \langle q, \epsilon, \epsilon \rangle, \\
&\langle q, bdcdccddca, S \rangle \vdash \langle q, bdcdccddca, bSa \rangle \vdash \langle q, dcdccddca, Sa \rangle \vdash \langle q, dcdccddca, Ra \rangle \vdash \langle q, dcdccddca, dcRa \rangle \vdash \\
&\qquad \langle q, cdccddca, cRa \rangle \vdash \langle q, dccddca, Ra \rangle \vdash \langle q, dccddca, dcRa \rangle \vdash \langle q, ccddca, cRa \rangle \vdash \langle q, cddca, Ra \rangle \vdash \\
&\qquad \langle q, cddca, cdRa \rangle \vdash \langle q, ddca, dRa \rangle \vdash \langle q, dca, Ra \rangle \vdash \langle q, dca, dcRa \rangle \vdash \langle q, ca, cRa \rangle \vdash \langle q, a, Ra \rangle \vdash \\
&\qquad \langle q, a, a \rangle \vdash \langle q, \epsilon, \epsilon \rangle.
\end{aligned}$$

Критерий за оценка:

За задачата се дават 4 точки. 2 точки се дават за правилно построяване на автомата. По 1 точка се дава за проследяване на извода на всяка от двете думи.

Втора задача

Условие:

Да се приведе в нормална форма на Чомски граматиката $\langle \{ S, R, T \}, \{ a, b, c, d \}, S, P \rangle$, където $P = \{ S \longrightarrow bSa, S \longrightarrow R, S \longrightarrow T, R \longrightarrow T, T \longrightarrow R, R \longrightarrow cdR, T \longrightarrow dcT, R \longrightarrow \epsilon \}$.

Решение:

Първо, добавяме нова начална аксиома S_0 и правилото $S_0 \longrightarrow S$. След това премахваме ϵ-правилата. Празната думе е достижима от нетерминалите $\{ S, R, T \}$ и точно тях премахваме в десните страни на правилата. Също така добавяме $S_0 \longrightarrow \epsilon$, т.к. езика съдържа празната дума. Получава се

$$\begin{aligned} P^1 = P \cup \{ S_0 \longrightarrow S, S_0 \longrightarrow \epsilon, R \longrightarrow cd, T \longrightarrow dc, S \longrightarrow ba \} \setminus \{ R \longrightarrow \epsilon \} = \\ = \{ S_0 \longrightarrow S, S_0 \longrightarrow \epsilon, S \longrightarrow bSa, S \longrightarrow R, S \longrightarrow T, R \longrightarrow T, T \longrightarrow R, R \longrightarrow cdR, T \longrightarrow dcT, \\ R \longrightarrow cd, T \longrightarrow dc, S \longrightarrow ba \}. \end{aligned}$$

Сега премахваме переименуващите правила. Първо, отстраняваме цикъла $R \longrightarrow T \longrightarrow R$, като заменяме навсякъде T с R и накрая премахваме правилото $R \longrightarrow R$. Получаваме

$$P^2 = \{ S_0 \longrightarrow S, S_0 \longrightarrow \epsilon, S \longrightarrow bSa, S \longrightarrow R, R \longrightarrow cdR, R \longrightarrow dcR, R \longrightarrow cd, R \longrightarrow dc, S \longrightarrow ba \}.$$

След това премахваме $S \longrightarrow R$ и така получваме

$$\begin{aligned} P^3 = P^2 \cup \{ S \longrightarrow cdR, S \longrightarrow dcR, S \longrightarrow cd, S \longrightarrow dc \} \setminus \{ S \longrightarrow R \} = \\ = \{ S_0 \longrightarrow S, S_0 \longrightarrow \epsilon, S \longrightarrow bSa, R \longrightarrow cdR, R \longrightarrow dcR, R \longrightarrow cd, R \longrightarrow dc, S \longrightarrow ba, \\ S \longrightarrow cdR, S \longrightarrow dcR, S \longrightarrow cd, S \longrightarrow dc \}. \end{aligned}$$

След премахване на $S_0 \longrightarrow S$ се получва

$$\begin{aligned} P^4 = P^3 \cup \{ S_0 \longrightarrow bSa, S_0 \longrightarrow ba, S_0 \longrightarrow cdR, S_0 \longrightarrow dcR, S_0 \longrightarrow cd, S_0 \longrightarrow dc \} \setminus \{ S_0 \longrightarrow S \} = \\ = \{ S_0 \longrightarrow \epsilon, S \longrightarrow bSa, R \longrightarrow cdR, R \longrightarrow dcR, R \longrightarrow cd, R \longrightarrow dc, S \longrightarrow ba, S \longrightarrow cdR, S \longrightarrow dcR, \\ S \longrightarrow cd, S \longrightarrow dc, S_0 \longrightarrow bSa, S_0 \longrightarrow ba, S_0 \longrightarrow cdR, S_0 \longrightarrow dcR, S_0 \longrightarrow cd, S_0 \longrightarrow dc \}. \end{aligned}$$

За да премахнем правилата със смесени десни части, добавяме $A \longrightarrow a$, $B \longrightarrow b$, $C \longrightarrow c$ и $D \longrightarrow d$. Така, стигаме до

$$\begin{aligned} P^5 = \{ S_0 \longrightarrow \epsilon, S \longrightarrow BSA, R \longrightarrow CDR, R \longrightarrow DCR, R \longrightarrow CD, R \longrightarrow DC, S \longrightarrow BA, S \longrightarrow CDR, \\ S \longrightarrow DCR, S \longrightarrow CD, S \longrightarrow DC, S_0 \longrightarrow BSA, S_0 \longrightarrow BA, S_0 \longrightarrow CDR, S_0 \longrightarrow DCR, \\ S_0 \longrightarrow CD, S_0 \longrightarrow DC, A \longrightarrow a, B \longrightarrow b, C \longrightarrow c, D \longrightarrow d \}. \end{aligned}$$

След премахване на правилата с дълги десни части, получаваме крайната граматика с нетерминали $\{ S, R, A, B, C, D, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8 \}$ и правила

$$\begin{aligned} P^6 = \{ S_0 \longrightarrow \epsilon, R \longrightarrow CD, R \longrightarrow DC, S \longrightarrow BA, S \longrightarrow CD, S \longrightarrow DC, S_0 \longrightarrow BA, S_0 \longrightarrow CD, \\ S_0 \longrightarrow DC, A \longrightarrow a, B \longrightarrow b, C \longrightarrow c, D \longrightarrow d, S \longrightarrow BL_1, L_1 \longrightarrow SA, R \longrightarrow CL_2, \\ L_2 \longrightarrow DR, R \longrightarrow DL_3, L_3 \longrightarrow CR, S \longrightarrow CL_4, L_4 \longrightarrow DR, S \longrightarrow DL_5, L_5 \longrightarrow CR, \\ S_0 \longrightarrow BL_6, L_6 \longrightarrow SA, S_0 \longrightarrow CL_7, L_7 \longrightarrow DR, S_0 \longrightarrow DL_8, L_8 \longrightarrow CR \}. \end{aligned}$$

Критерий за оценка:

За задачата се дават 4 точки. За всеки от четирите етапа - премахване на правилата с дясна част ϵ, премахване на преименуващите правила, премахване на правилата със смесени дясни части и премахване на правилата с дълги дясни части - се дава по 1 точка.

Трета задача

Условие:

Дадени са следните два езика:

- $L_1 = \{ a^n b^{2m} a^n \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$;
- $L_2 = \{ a^n \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m a^{3n} \mid n \geq 0, m \geq 0, \beta_i \in M \}$, където M е контекстно-свободен език над азбуката $\{ c, d, e \}$.

Да се докаже, че $L_1 \cup L_2$ е контекстно-свободен език.

Решение:

Първо ще покажем, че L_1 и L_2 са контекстно-свободни.
Ще докажем, че L_1 е контекстно-свободен като построим контекстно-свободна граматика за него. Граматиката е $\langle \{ S, D \}, \{ a, b \}, S, P \rangle$, където $P = \{ S \longrightarrow aSa, S \longrightarrow \epsilon, S \longrightarrow bDb, D \longrightarrow \epsilon \}$.
Т.к. M е контекстно-свободен, следователни и M^* е контекстно-свободен език. Нека $\langle N, \{ c, d, e \}, S, P \rangle$ е граматиката за M^*. Тогава граматиката за L_2 е $\langle N \cup \{ S' \}, \{ a, b, c, d, e \}, S', P' \rangle$, където $S' \notin N$ и $P' = P \cup \{ S' \longrightarrow aS'aaa, S' \longrightarrow S \}$.
Накрая, $L_1 \cup L_2$ е контекстно-свободен език, т.к. обединението запазва контекстна-свободност.

Критерий за оценка:

За задачата се дават 3 точки. 1 точка се дава за показване на контекстна-свободност за L_1. 1.5 за L_2. А оставащите 0.5 точки се дават за финалното заключение за $L_1 \cup L_2$.

Четвърта задача

Условие:

Нека имаме езбуката $\Sigma = \{ a, b \}$. Да се построи автоматна граматика по следния автомат:

	$\rightarrow 0$	1	2	3	4	5	6
a	1	2	1	5	6	6	6
b	5	3	3	4	4	6	5

Също да се намери една дума, с поне 8 символа, която е част от езика на автомата и да се покаже извод на тази дума от построената граматика.

Решение:

Търсената граматика е $\langle \Sigma, \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}, 0, P \rangle$, където $P = \{ 0 \longrightarrow a1, 0 \longrightarrow b5, 1 \longrightarrow a2, 1 \longrightarrow b3, 2 \longrightarrow a1, 2 \longrightarrow b3, 3 \longrightarrow a5, 3 \longrightarrow b4, 4 \longrightarrow a6, 4 \longrightarrow b4, 5 \longrightarrow a6, 5 \longrightarrow b6, 6 \longrightarrow a6, 6 \longrightarrow b5, 3 \longrightarrow \epsilon, 4 \longrightarrow \epsilon \}$.
Една дума от езика на автомата е $aaaaabbb$. Ето и извод на думата от граматиката: $0 \vdash a1 \vdash aa2 \vdash aaa1 \vdash aaaa2 \vdash aaaaa1 \vdash aaaaab3 \vdash aaaaabb4 \vdash aaaaabbb4 \vdash aaaaabbb$.

Критерий за оценка:

За задачата се дават 3 точки. 2 точки се дават за правилно построяване на граматиката, а за извод за правилна дума се дава още една точка.

Пета задача

Условие:

Нека имаме езбуката $\Sigma = \{ \ a, b \ \}$. Ако $\alpha \in \Sigma^*$, то тогава с $N_a(\alpha)$ и $N_b(\alpha)$ ще означаваме съответно:

$$N_a(\alpha) = \text{ броя на срещанията на буквата } a \text{ в } \alpha,$$
$$N_b(\alpha) = \text{ броя на срещанията на буквата } b \text{ в } \alpha.$$

Да се построи контекстно-свободна граматика за езика $\{ \ \alpha \in \Sigma^* \mid 2N_a(\alpha) = N_b(\alpha) \ \}$.

Решение:

Търсената граматика е:
$\langle \{ \ S \ \}, \Sigma, S, P \rangle$, където $P = \{ \ S \longrightarrow SaSbSbS, S \longrightarrow SbSaSbS, S \longrightarrow SbSbSaS, S \longrightarrow \epsilon \ \}$.

Критерий за оценка:

За задачата се дават 2 точки. Една точка за даване на правила, които добавят два пъти повече символи b, отколкото символи a, и още една за правилно позициониране на нетерминалите в дясната част на правилата.