I. Изследване на функция и построяване на графика.

(Примерна и незадължителна схема)

1. Дефиниционно множество.

Представяме DM като крайно обединение на интервали.

2. Симетрии в графиката на функцията.

Тук проверяваме дали:
a)$f(-x) = f(x)\ \ \forall x \in DM$. Тогава имаме четна функция или от геометрична гледна точка осева симетрия.
b)$f(-x) = -f(x)\ \ \forall x \in DM$. Тогава имаме нечетна функция или от геометрична гледна точка централна симетрия.
c)$\exists T > o\ ;\ f(x+T) = f(x)\ \ \forall x \in DM$. Тогава имаме периодична функция или от геометрична гледна точка транслация.

3. Знак на f(x).

Тук изследваме разположението на графиката относно координатните оси и евентуалните пресечни точки с тях.

4. Поведение на функцията в краищата на интервалите на дефиниционното множество.

Тези изследвания включват и намирането на:
a)Вертикални асимптоти: Ако например $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$, то имаме лява вертикална асимптота $x = a$.
b)Хоризонтални асимптоти: Ако например $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a\,;\ |a| < \infty$, то имаме хоризонтална асимптота $y = a$.
c)Наклонени асимптоти: Ако например $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

и съществуват границите: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - kx = n$,
то имаме наклонена асимптота $y = kx + n$.

5. Знак на $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$**.**

Тук определяме интервалите на растене и намаляване на функцията. Точките в които функцията е непрекъсната и имаме смяна на знака на производната са точки на локален екстремум. Желателно е да знаем кои са допирателните (евентуално различни) отляво и отдясно в такива точки.

6. Знак на $\mathrm{f}''(\mathrm{x})$**.**

Тук определяме интервалите на вдлъбнатост и изпъкналост на функцията. Точките в които функцията е непрекъсната и имаме смяна на знака на втората производна са инфлексни точки. Желателно е да знаем кои са допирателните (евентуално различни) отляво и отдясно в такива точки.

Полезни съвети:

1.Използвайте работен чертеж и нанасяйте цялата информация която имате до момента на него!

2.В точки 3), 5) и 6)използвайте числова ос и нанасяйте отгоре информацията за знака, а отдолу съответната информация за функцията!

3.Проверявайте за противоречия между информацията от различните точки !

II. Неопределени интеграли.

1. Таблични интеграли.

1) $$\int x^{\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & \alpha \neq -1; \\ \ln|x| + c & \alpha = -1. \end{cases}$$

2) $$\int e^{x}\,dx = e^{x} + c, \qquad \int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c \ \ (0 < a \neq 1).$$

3) $$\int \sin x\,dx = -\cos x + c, \qquad \int \mathrm{shx}\,dx = \mathrm{ch}x + c.$$

4) $$\int \cos x\,dx = \sin x + c, \qquad \int \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}x + c.$$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c, \qquad \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + c.$

6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c, \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + c.$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c; \\ -\operatorname{arcctg} x + c. \end{cases}$

Ако $a \neq 0$ $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c; \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + c. \end{cases}$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x + c; \\ -\arccos x + c. \end{cases}$

Ако $a \neq 0$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + c; \\ -\arccos \frac{x}{a} + c. \end{cases}$

9) Ако $a \neq 0$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + c.$

2. Интегриране чрез "непосредствено внасяне под знака на диференциала".

Ако $\displaystyle\int \varphi(y)\,dy = \Phi(y) + c,$ то $\displaystyle\int \varphi(g(x))\,g'(x)dx = \Phi(g(x)) + c.$

3. Интегриране чрез субституции.

Нека $\varphi(y)$ е диференцуема, като $\varphi'(y)$ е с постоянен знак, $\phi(x)$ е нейната обратна функция. В интеграла $\displaystyle\int f(x)\,dx$ извършваме смяна: $x = \varphi(y)$.

Имаме $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy.$

Тогава, ако $\Phi(y)$ е примитивната на функцията $f(\varphi(y))\,\varphi'(y)$, то $\displaystyle\int f(x)\,dx = \Phi(\phi(x))$.

4. Интегриране "по части".

1) Правило:

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\,dx &= \int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)\\ &= \int g(x)f'(x)\,dx.\end{aligned}$$

2) Приложения:
a) Ако $P(x)$ е алгебричен полином, а f е някоя от $\left\{e^{ax+b}\,;\ \sin(ax+b)\,;\ \cos(ax+b)\right\}$, където $a\,,\ b \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned}\int P(x)f(x)\,dx &= \int P(x)dF(x) = P(x)F(x) - \int F(x)dP(x)\\ &= \int F(x)P'(x)\,dx,\end{aligned}$$

където $F(x)$ е примитивна на $f(x)$.

b) Ако $P(x)$ е алгебричен полином (може и за някои рационални функции), а f е някоя от $\{\ln(ax+b)\,;\ \arcsin(ax+b)\,;\ \mathrm{arctg}(ax+b)\}$ където $a\,,\ b \in \mathbb{R}$, то

$$\int P(x)f(x)\,dx = \int f(x)dQ(x) = f(x)Q(x) - \int Q(x)df(x) = \int Q(x)f'(x)\,dx,$$

където $Q(x)$ е примитивна на $P(x)$.

c) Пресмятане чрез получаване на подходящи рекурентни формули:

c_1)"Четиринадесетхилядник:"

$$\begin{aligned}I_n(x) = &\int \tfrac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \int \tfrac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = I_{n-1}(x) - \int \tfrac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx =\\ &I_{n-1}(x) - \tfrac{1}{2(n-1)}\int x\,d\left(\tfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\right) =\\ &I_{n-1}(x) + \tfrac{1}{2(n-1)}\left(\tfrac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - I_{n-1}(x)\right) =\\ &\tfrac{1}{2(n-1)}\tfrac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \tfrac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}(x).\end{aligned}$$

c_2)Интеграли от произведение на степени на $\sin x$ и $\cos x$:
Нека $m,\ n \in \mathbf{Z}$. Тогава:

$$S_n(x) = \int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}S_{n-2}(x)\,;\ \ n \neq 0\,;$$

$$S_n(x) = \int \sin^n x\,dx = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\cos x + \frac{n+2}{n+1}S_{n+2}(x)\,;\ \ n \neq -1\,;$$

$$C_n(x) = \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} C_{n-2}(x)\, ; \;\; n \neq 0\, ;$$

$$C_n(x) = \int \cos^n x \, dx = -\frac{1}{n+1} \sin x \cos^{n+1} x + \frac{n+2}{n+1} C_{n+2}(x)\, ; \;\; n \neq -1\, ;$$

$$SC_{n,m}(x) = \int \sin^n x \cos^m x \, dx = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x \cos^{m-1} x + \frac{m-1}{n+1} SC_{n+2,m-2}(x),$$

за $n \neq -1$;

$$SC_{n,m}(x) = \int \sin^n x \cos^m x \, dx = -\frac{1}{m+1} \sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + \frac{n-1}{m+1} SC_{n-2,m+2}(x),$$

за $m \neq -1$.

d) Пресмятане чрез получаване на подходящи рекурсивни формули:

При интегралите $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ и $\int \sqrt{x^2 \pm 1}\, dx$, както и за интеграли от произведение на две функции от множеството в приложение a).

5. Интегриране на рационални функции

Ако рационалната функция е неправилна, то тя трябва да бъде представена като сума на полином и правилна рационална функция. Всяка правилна рационална функция се представя като сума на елементарни рационални функции.

1) Директен метод:

Нека

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^{\nu_i} \prod_{j=1}^{m} (x^2 + b_j x + c_j)^{\mu_j}},$$

където $b_j^2 - 4c_j < 0 \, \forall j = 1, \ldots, m$.

Тук $degQ = N = \sum_{i=1}^{n} \nu_i + 2\sum_{j=1}^{m} \mu_j, \;\; degP \leq N-1$. Тогава:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{\nu_i} \frac{A_{il}}{(x-x_i)^l} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{\mu_j} \frac{B_{js}x + C_{js}}{(x^2+b_jx+c_j)^s},$$

където $\{A_{il}\}_{i=1,\,l=1}^{n\,,\;\nu_i}$, $\{B_{js}\}_{j=1,\,s=1}^{m\,,\;\mu_j}$ и $\{C_{js}\}_{j=1,\,s=1}^{m\,,\;\mu_j}$ са неизвестни коефициенти, които се получават по метода на неопределените коефициенти след привеждане към общ знаменател в дясната страна на горното равенство. Това е линейна система от N уравнения с N неизвестни. От Линейната алгебра е известно, че тази система има единствено решение.

2) Комбиниран метод от метода на Остроградски-Ермит и метода на заместването:

Метод на Остроградски-Ермит: Представяме

$$(O-E) \quad \int R(x)\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx,$$

където $Q_2(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\,.\prod_{j=1}^{m}\left(x^2+b_jx+c_j\right)$,

$Q_1(x) = \dfrac{Q(x)}{Q_2(x)}$, а полиномите P_1 иP_2 са с неизвестни коефициенти и такива, че $degP_1 = degQ_1 - 1$ и $degP_2 = degQ_2 - 1$. Коефициентите се получават след диференциране на $(O-E)$, привеждане към общ знаменател в дясната страна и решаване на линейна система.

Метод на заместването:

За пресмятане на интеграли от вида $\displaystyle\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$, като този в дясната страна на метода Остроградски-Ермит, където

$Q_2(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\,.\prod_{j=1}^{m}(x-z_j)\,(x-\overline{z_j})$, $z_j,\,\overline{z_j} \in \mathbf{C}$.

Представяме

$$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x-x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{M_j}{x-z_j} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\overline{M_j}}{x-\overline{z_j}}\,,$$

където:

$A_i = F_i(x_i)\,,\; F_i(x) = (x - x_i)\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ и $M_j = G_j(z_j)\,,\; G_j(x) = (x - z_j)\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$.

След като се намерят неизвестните коефициенти остава да се сумират $\frac{M_j}{x - z_j} + \frac{\overline{M_j}}{x - \overline{z_j}}$ във вида: $\frac{B_j x + C_j}{x^2 + b_j x + c_j}$. Това за всяко $j = 1, \ldots, m$.

6. Интегриране на ирационални функции

1) Нека $R(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ е рационална функция на $n+1$ променливи. Разглеждаме интеграли от вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right),$$

където $q_1, q_2, \ldots, q_n$ са цели и положителни, $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbf{Z}$, $a, b, c, d \in R\,;\ ad - bc \neq 0$.

Извършваме субституцията: $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^{HOK\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}}$.

2) Интеграли от диференциален бином.

Разглеждаме интеграли от вида $\displaystyle\int x^m (ax^n + b)^p\, dx$, където $a\,,\ b\ \in\ \mathbf{R}\ ; a\,, \neq\ 0$ и $p\,,\ q\,,\ r\ \in\ \mathbf{Q}$. Този интеграл се свежда до интегал от рационална функция само в следните три случая:

a)$p \in \mathbf{Z}$. Това е задача от предната точка.

b)$\dfrac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$. Тогава полагаме $ax^n + b = t^k$, където k е знаменателят на p.

c)$\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$. Тогава преобразуваме $\displaystyle\int x^m (ax^n + b)^p\, dx = \int x^{m+np}\left(a + bx^{-n}\right)^p dx$ и имаме случай b).

3) Субституции на Л. Ойлер.

Разглеждаме интеграли от вида

$$\int R\left(x\,,\,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx,$$

където $a\ \neq 0$ и $b^2-4ac\neq 0$. Този интеграл се свежда до интегал от рационална функция по следните три начина:

a)$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x\pm t$, ако $a>0$.

b)$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm xt\pm\sqrt{c}$, ако $c>0$.

c)$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\left(x-x_i\right)t$, ако $b^2-4ac>0$ и x_i е някоя от нулите на квадратния тричлен.

7. Интегриране на рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$.

1) Нека $R\left(x_1,x_2\right)$ е рационална функция на две променливи. Разглеждаме интеграли от вида $\displaystyle\int R\left(\sin x\,,\,\cos x\right)\,dx$. С помощта на субституции свеждаме до интеграл от рационална функция на новата променлива.

a)Универсална тригонометрична субституция: $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Тогава:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

и

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

В следните три случая може да се използват и субституциите:

b)Ако

$$R\left(-\sin x\,,\,\cos x\right)=-R\left(\sin x\,,\,\cos x\right),$$

полагаме $t=\cos x$.

c)Ако

$$R\left(\sin x\,,\,-\cos x\right)=-R\left(\sin x\,,\,\cos x\right),$$

полагаме $t=\sin x$.

d)Ако

$$R\left(-\sin x\,,\,-\cos x\right)=R\left(\sin x\,,\,\cos x\right),$$

полагаме $t=\operatorname{tg}x$.