Езици, автомати и изчислимост

Александра Соскова

Факултет по математика и информатика, СУ

Упражнения:

Стефан Герджиков

Христо Ганчев

Факултет по математика и информатика, СУ

Hopcroft, Motvani, Ulman

Въведение в теория на автоматите, формалните езици и сложността

- Addison-Vesley, 2002,
- Ориентирана към приложения
- Недостатъчно материал

$\neq$ старата книга на Hopcroft Ullman.

Lewis and Papadimitiou

Elements of the theory of computation

- 2. ed. Prentice-hall, 1998
- Добра теоретична мотивация
- Добре обяснен материал

M. Sipser

Introduction to the theory of computation

- 2. ed. PWS publ comp, MIT, 2006
- Неформално описание- интуиция
- Богат, добре обяснен материал

К. Манев

Увод в дискретната математика

- КЛМН, София, 2003
- автомати и гарматики - добре (друга структура)
- изчислимост и сложност- малко

Система за оценяване

Точки:

- Домашни 2x50 т.
- Контролно: 1x200 т.
- Писмен изпит: 200 т.
- Устен изпит: 250 т.

Оценяване: $\max\{\text{контр.}, \text{писмен}\}$

Ако имате мин 100 т. от устния изпит, то

- Отличен: ≥ 450 т.
- Мн. Добър: ≥ 350 т.
- Добър: ≥ 300 т.
- Среден: ≥ 250 т.

- 3 в. пр. н. ера Евклид ; 9в. Ал-Хоразми
- 1646-1716 Годфрид Лайбниц
- 1832 Чарлз Бабидж - Analytical Engine (Ада Байрон)
- 1900 Давид Хилберт— Хилбертовата програма
- 1933 Курт Гьодел - Теорема за непълнота
- 1936 Алан Тюринг - Машини на Тюринг, Стивън Клини - теория на рекурсивните функции
- Алонзо Чърч — λ изчислими функции
- Шепердсон и Стържиц — МНР
- Чомски, Майхил, Нероуд, Скот, Рабин— автомати
- Стивън Кук—сложност

Основни парадигми

Формални езици: Езикът с който общуваме с компютъра?

Теория на автоматите: Абстрактен модел на прости изчисления.

Изчислимост: Какви проблеми (не) може да се разрешат с компютър?

Сложност: Кои проблеми (не) можем да разрешим ефективно?

Защо ни трябва всичко това?

- (не)директно приложение
  (алгоритми, идеи, методи)
  в езиците за програмиране, компилатори, обработка на текст, (лингвистика), хардуерно и софтуерно инженерство,. . .

- Опит с типични дискретни доказателства
  $\rightsquigarrow$ теория на алгоритмите, логика, теория на изчислимостта, . . .

Формални езици, регулярни операции

Азбука: крайно множество от сиволи (Σ)

Думи (в Σ): крайна редица от символи от Σ (w)

Език: множество от думи в Σ (L)

Празната дума: ε $(\{\varepsilon\} \neq \emptyset\ !)$

Конкатенация на думи: Пример: $ac \cdot bab = acbab$.

Конкатенация на езици:

$$L_1 \cdot L_2 := \{w_1 \cdot w_2 : w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}.$$

Пример: $\{ab, ba\} \cdot \{aa, bb\} = \{abaa, abbb, baaa, babb\}$

Обединение на езици:

$$L_1 \cup L_2 := \{w_1 \cdot w_2 : w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}.$$

Пример: $\{ab, ba\} \cup \{aa, bb\} = \{ab, ba, aa, bb\}$

Означения

$w^0 := \varepsilon$, $w^n := w \cdot w^{n-1}$ за $n \geq 1$.

$L^0 := \{\varepsilon\}$, $L^n := L \cdot L^{n-1}$ за $n \geq 1$.

Пример: $a^3 = aaa$, $\{a, bb\}^2 = \{aa, abb, bba, bbbb\}$

Звезда на Клини: $L^* := \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$

(всяка отделна дума е крайна!)

Пример: $\{a, b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$

Σ^*: Множеството от всички думи в Σ.

Позитивна обвивка : $L^+ := \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$

Допълнителен език: $L^c := \Sigma^* \setminus L$

Регулярни езици

основни $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ и $\{a\}$ за всяко $a \in \Sigma$ са регулярни езици;

$\cup$ Ако L_1 и L_2 са регулярни, то и $L_1 \cup L_2$ е регулярен;

$.$ Ако L_1 и L_2 са регулярни , то и $L_1.L_2$ е регулярен;

$*$ Ако L е регулярен, то и L^* е регулярен.

Един език е регулярен, ако се получава от основните с помощта на операциите обединение, конкатенация и звезда, приложени краен брой пъти.

Означения

Let $w = u \cdot v \cdot x$

начало (префикс): u

поддума (инфикс): v

край (суфикс): x

обратна: $(c_1 c_2 \cdots c_k)^R = c_k \cdots c_2 c_1$

$|w|$(дължина): броят на буквите в w

- $L^{=} := \{0^n1^n : n \geq 1\} = \{01, 0011, 000111, \ldots\}$
- $\{a^nb^nc^n : n \in \mathbb{N}\} = \{abc, aabbcc, aaabbbccc, \ldots\}$
- $\{ww : w \in \Sigma^*\} = \{\varepsilon, 00, 11, 0000, 0101, 1010, 1111, \ldots\}$
- $\left\{ww^R : w \in \Sigma^*\right\} = \{\varepsilon, 00, 11, 0000, 0110, 1001, 1111, \ldots\}$
- $L_P := \left\{w : w = w^R\right\} =$
  $\{\varepsilon, 0, 1, 00, 11, 000, 010, 101, 111, \ldots\}$
  Палиндром
  English: Ana, level, eye, civic, refer
  A Santa lived as a devil at NASA, Borrow or rob;
  German: gnudung, hangnah, kajak, lagerregal;
  Bulgarian: Аз обичам мач и боза; Насила закараха свинете ни в Сахара! - каза Лисан ; "
  Latin: Sator Arepo Tenet Opera Rotas .

Пример за формален език

Балансирани леви и десни скоби $L_{()}$ в $\mathbf{\Sigma} = \{(,)\}$:

- $\varepsilon \in L_{()}$,
- ако $u \in L_{()}$, $v \in L_{()}$, то $uv \in L_{()}$,
- ако $u \in L_{()}$, то $(u) \in L_{()}$.

Алгоритмични проблеми

Принадлежност на дума: $w \in L$?

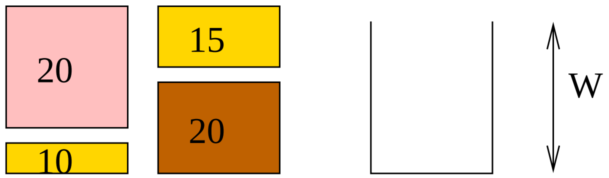
Еквивалентност: $L_1 = L_2$?

Спецификация: математическа дефиниция (описание) на езика (кога една дума $w \in L$), гарматики, разпознаватели = автомати(машини), трансформации между различни спецификации на L.

Защо формални езици?

- Езиците за програмиране, форматът на данните,... са формални езици.
- Лесно се формулират задачите.
- Много алгоритмични проблеми се свеждат до принадлежност на дума в даден формален език.

Пример: Задачата за раницата



- n обекта с тегло $w_i \in \mathbb{N}$ и стойност (печалба) p_i
- да се намери подмножество $\mathbf{x}$ от обектите
- такова, че $\sum_{i \in \mathbf{x}} w_i \leq W$ и
- с максимална печалба $\sum_{i \in \mathbf{x}} p_i$

Пример: Задачата за раницата

Дефинираме $L \subseteq \{0, 1, `,'\}^*$:
$w \in L$, ако w е списък от $2n+2$ двоични числа, разделени със запетая $P, W, w_1, p_1, \ldots, w_n, p_n$, такива че
$\exists \mathbf{x} \subseteq \{1, \ldots, n\} : \sum_{i \in \mathbf{x}} p_i \geq P$ и $\sum_{i \in \mathbf{x}} w_i \leq W$

Принадлежността към езика $L \rightsquigarrow$ Задачата за раницата:

- намираме оптималното P с двоично търсене
- намираме съответеното $\mathbf{x}$, махайки от списъка елемент по елемент.

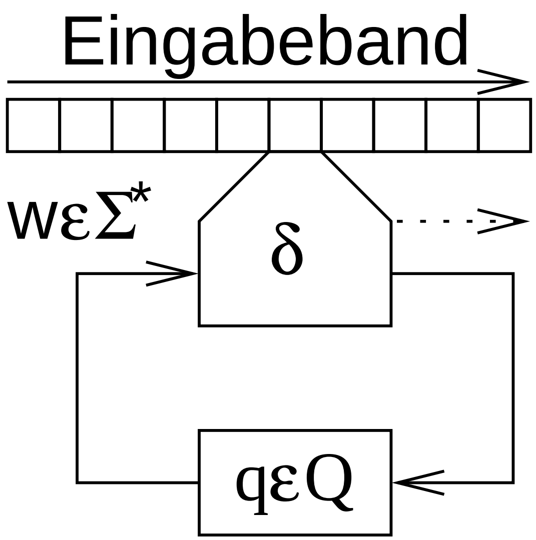
Всичко $\leq n + \log \sum_i p_i$ за да сведем единия проблем до другия "малко"

Теория на автоматите

Крайни автомати

Един детерминиран краен автомат се състои от:

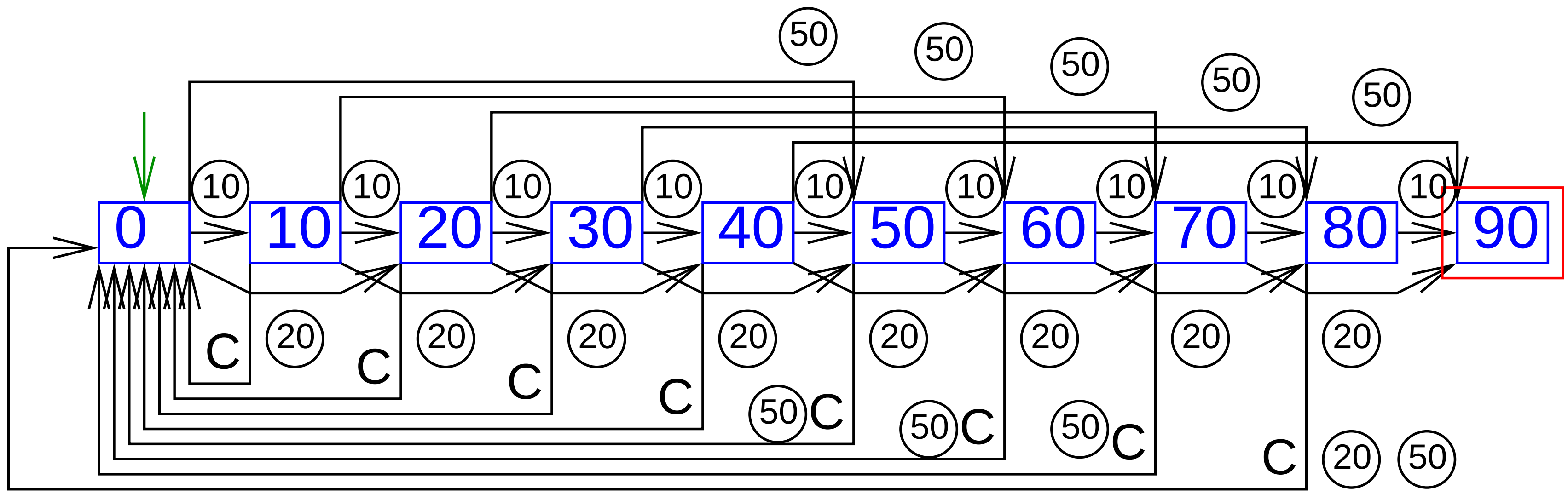
- Q, крайно множество от състояния;
- Σ, крайно множество от символи, (азбука);
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, функция на прехода;
- $s \in Q$, начално състояние;
- $F \subseteq Q$, крайно множество от заключителни състояния.



Пример: билетен автомат

- Стандартна цена на билет 90 цента
- приемат се монети от: 10, 20 и 50
- Стоп с бутон C или по-голяма сума монети
- 90 цента са пуснати $\rightsquigarrow$ ready

$$(\{10, 20, 50, C\}, \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}, \delta, 0, \{90\})$$



Граматики

Граматика $G = (V, \Sigma, P, S)$

- V, променливи
- Σ, азбука (терминали) $(V \cap \Sigma = \emptyset)$
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$, правила, $|P| < \infty$
  На всяко правило, лявата част съдържа поне една променлива
- S, начална променлива

Граматики

Йерахия на Чомски: класификация в зависимост от вида на правилата.

В частност: контекстно-свободни езици $A \longrightarrow \alpha$, $A \in V$, $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$.

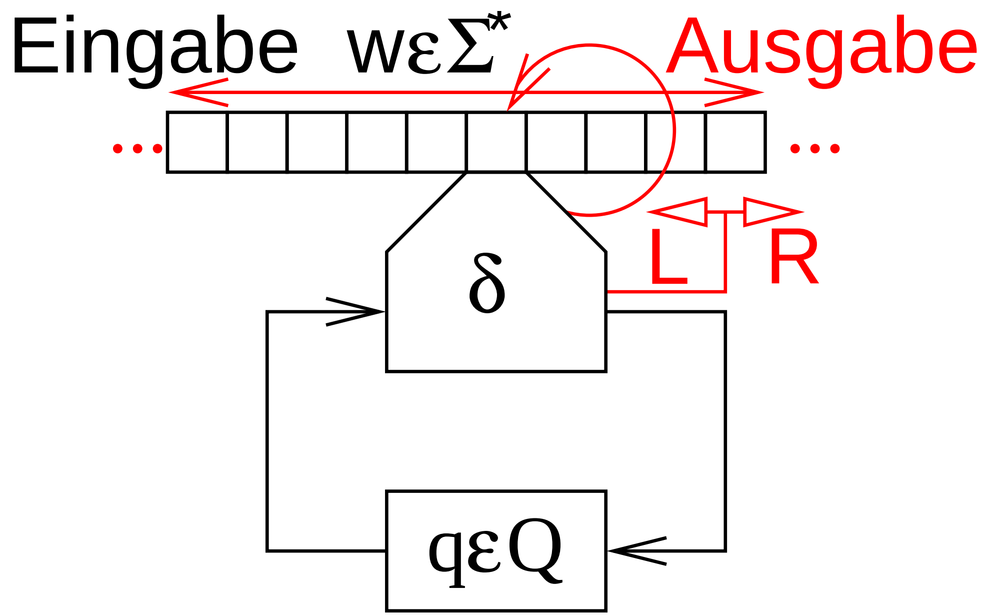
- Спецификация на синтаксиса на програмните езици.
- Контекстно-свободните езици са разрешими.
- Кои езици се рапознават за линейно време?

Пример: Аритметични изрази

$G = (\{E, T, F\}, \{a, +, *, (,)\}, P, E)$, където

$$
\begin{aligned}
P = \{E &\to T, \\
E &\to E + T, \\
T &\to F, \\
T &\to T * F, \\
F &\to a, \\
F &\to (E)\}
\end{aligned}
$$

Машини на Тюринг и изчислимост



- Машините на Тюринг решават не повече и не по-малко задачи, отколкото другите достатъчно мощни машинни модели
- Може ли да разрешим всеки проблем с машина на Тюринг?

Теория на сложността: Кои задачи можем да пресметнем ефективно?

- Пак се базираме на машини на Тюринг. Естествено е да искаме алгоритмите да са ефективни, т.е. времето за изпълнение или ресурсите да са малки (като функция на големината на входа).

$$n \approx n^2 \approx \cdots n^{42} \approx \cdots \ll \quad 2^{0.134n}$$

- Знеаем много малко за долната граница на времето за изчисление
- Но има големи класове от задачи, които макар и не полиномиални, за всички други по-трудоемки задачи изглеждат прекрасно.